N° d'ordre : 441

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Michel DAUMENS

Développement multipolaire des fonctions de vertex.
Étude de quelques problèmes de polarisation.

Soutenue le 10 juin 1974 devant la Commission d'Examen

MM. M. RIMPAULT, *Professeur* ..... Président

Y. ABGRALL, *Professeur* .....
L. MICHEL, *Professeur à l'I.H.E.S.* .....
P. MINNAERT, *Professeur* .....
E. DE RAFAEL, *Directeur de Recherche* ..... } Examinateurs

1974

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549623_0034

N° d'ordre : 441

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Michel DAUMENS

Développement multipolaire des fonctions de vertex.

Étude de quelques problèmes de polarisation.

Soutenue le 10 juin 1974 devant la Commission d'Examen

MM. M. RIMPAULT, *Professeur*	Président
Y. ABGRALL, *Professeur*	Examinateurs
L. MICHEL, *Professeur à l'I.H.E.S.*	
P. MINNAERT, *Professeur*	
E. DE RAFAEL, *Directeur de Recherche*	

1974

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Physique Théorique de l'Université de Bordeaux I, sous la direction amicale de Pierre Minnaert à qui je tiens à exprimer toute ma gratitude pour la formation scientifique qu'il a su m'inculquer et ses encouragements continuels.

Je remercie vivement Louis Michel pour l'intérêt qu'il m'a témoigné au cours de mes recherches et pour les séjours très fructueux passés à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques.

Je suis très reconnaissant à Eduardo de Rafael de s'être intéressé à mon travail et de m'avoir indiqué des orientations de recherches futures.

Je remercie Monsieur M. Rimpault d'avoir accepté de présider mon jury de thèse et Monsieur Y. Abgrall qui a bien voulu en faire partie.

Je remercie aussi les enseignants et les chercheurs du Laboratoire, dont le regretté Ph. Salin, qui, par leur coopération amicale, m'ont apporté une aide précieuse, et plus particulièrement Yves Noirot pour des discussions préliminaires et Georges Massas pour sa collaboration dans la troisième partie de ce travail.

Enfin, je remercie Mademoiselle Bernat et Madame Martelet pour le soin qu'elles ont apporté à la dactylographie et à la duplication de cette thèse ainsi que Madame Renaud et Monsieur Fonteneau pour leur participation à sa présentation matérielle.

1 - INTRODUCTION

A l'heure actuelle les physiciens des hautes énergies ont mis en évidence plusieurs centaines de particules ou d'états résonnants que l'hypothèse de l'invariance des lois physiques par transformations du groupe de Poincaré permet de classer selon leur masse et leur spin, [Wig.39]. Cependant leurs interactions peuvent être décrites par seulement trois types d'interactions fondamentales, qui se différencient par leur intensité, leur portée, et les particules qu'elles mettent en jeu, ce sont les interactions fortes, électromagnétiques et faibles, les interactions gravitationnelles entre particules étant négligeables.

La constante de structure fine : $\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ donne l'ordre de grandeur de l'intensité des interactions électromagnétiques. Les qualificatifs de fortes ou faibles donnés aux deux autres interactions sont justifiés par leurs intensités relativement à celle des interactions électromagnétiques. En effet les constantes $\frac{g^2}{4\pi} \simeq 15$ et $\frac{Gm_N^2}{4\pi} \simeq 10^{-6}$, où g est la constante de couplage pion-nucléon, G la constante de Fermi et m_N la masse du nucléon, donnent respectivement les intensités des interactions fortes et faibles.

L'électrodynamique quantique est basée sur l'échange du photon dont la masse nulle correspond à la portée infinie des interactions électromagnétiques. Par analogie dans un cadre d'interaction du type Yukawa, la portée de l'interaction est déterminée par l'inverse de la masse de la particule échangée. Dans le cas des interactions fortes la portée de l'interaction nucléon-nucléon due à l'échange d'un pion est $1/m_\pi \sim 1{,}4.10^{-13}$cm. De même on peut supposer que les interactions faibles se font par l'échange d'un "boson intermédiaire" W. Expérimentalement, la limite inférieure de la masse m_W de cette particule, si elle existe, est de quelques GeV. Pour m_W = 2 GeV, la portée des interactions faibles est

inférieure à 10^{-14} cm : c'est la plus courte des trois interactions. Pour des énergies moyennes, on peut admettre en première approximation que ces interactions sont ponctuelles, c'est la théorie de Fermi des interactions faibles.

Les interactions électromagnétiques mettent en jeu le photon et les particules possédant une charge électrique ou un moment magnétique. Les interactions faibles font intervenir presque toutes les particules observées. On appelle "leptons" celles qui ont des interactions faibles mais jamais d'interactions fortes : ce sont les électrons, les muons et les neutrinos. On appelle "hadrons" les particules qui ont des interactions fortes. Les hadrons de spin entier sont appelés "mésons" et ceux de spin demi-entier "baryons".

Face à cette situation, le physicien théoricien peut étudier les symétries de ces interactions afin de classer les particules en définissant de nouveaux nombres quantiques, par exemple, les charges leptonique et baryonique, l'isospin, l'étrangeté, l'hypercharge... Il peut aussi étudier la dynamique de ces interactions en élaborant des modèles phénoménologiques qui permettent d'expliquer les résultats expérimentaux et d'orienter les futures recherches expérimentales. Cependant on ne peut tester valablement un modèle dynamique sans avoir étudié les contraintes cinématiques, i.e. relatives à l'invariance relativiste, qui limitent les paramètres du modèle. C'est pourquoi, il est nécessaire de séparer les problèmes dynamiques des problèmes purement cinématiques.

Dans ce travail nous apportons notre contribution à deux types de problèmes cinématiques déjà longuement étudiés : le développement multipolaire des fonctions de vertex et les mesures de polarisation. Nous avons divisé notre travail en trois parties. La première est consacrée à la construction des bases, harmoniques sphériques tensorielles et multipoles tensoriels, sur lesquelles seront développées dans la

deuxième partie les fonctions de vertex à une et deux particules finales. La troisième partie traite essentiellement des problèmes de polarisation.

La première partie comprend deux chapitres. Dans le premier nous construisons les harmoniques sphériques tensorielles qui se transforment par rotation comme des opérateurs tensoriels irréductibles et qui généralisent les harmoniques sphériques vectorielles de Blatt et Weisskopf. L'étude de leurs propriétés géométriques nous conduit à définir par transformation orthogonale la base des multipoles tensoriels qui sont orthogonaux à la fois en tant que fonctions et en tant que tenseurs. L'étude de l'action des opérateurs différentiels sur les harmoniques et les multipoles nous permet d'utiliser les multipoles vectoriels pour résoudre l'équation d'Helmholtz du potentiel vecteur électromagnétique.

Dans le chapitre deuxième nous généralisons à l'espace de Minkowski les harmoniques sphériques et multipoles tensoriels et nous introduisons la notion de multipoles tensoriels irréductibles se transformant selon une seule représentation dans une transformation de Lorentz pure.

La deuxième partie traite du développement multipolaire des fonctions de vertex. Les fonctions de vertex tensorielles d'ordre r sont les éléments de matrice d'un opérateur tensoriel d'ordre r entre les états physiques à une particule initiale et une ou deux particules finales. Le but du développement multipolaire est d'extraire de ces fonctions des facteurs de forme contenant toute l'inconnue dynamique.

Des développements multipolaires des fonctions de vertex à une particule finale ont déjà été effectués dans un référentiel donné et pour des opérateurs scalaires ou quadrivectoriels, par Durand, De Celles et Marr, d'une part, et par De Rafael d'autre part. Tous ces auteurs choisissent leur référentiel en fonction du signe du transfert $\underline{q}^2 = (\underline{p}_2 - \underline{p}_1)^2$. Durand, De Celles et Marr considèrent seulement le cas $\underline{q}^2 < 0$ et utilisent le système de Breit (ou du mur de briques), tandis

que De Rafael considère les deux cas $\underline{q}^2 < 0$ et $\underline{q}^2 > 0$ et il utilise aussi le système de Breit pour $\underline{q}^2 < 0$ et le système du centre de masse pour $\underline{q}^2 > 0$.

Les fonctions de vertex à deux particules finales n'ont été explicitement étudiées que dans le cas d'un opérateur scalaire. Mais certains développements multipolaires d'amplitudes effectués par Chew, Goldberger, Low et Nambu, Moussa et Stora, ou par Adler peuvent se ramener à des développements de fonctions de vertex quadrivectorielles à deux particules finales.

Cette deuxième partie comprend trois chapitres dans lesquels nous développons un formalisme nous permettant de faire le lien entre les résultats de ces différents auteurs et de les généraliser.

Le développement des fonctions de vertex à une particule finale est traitée dans le chapitre troisième. Nous gardons notre référentiel arbitraire avec l'hypothèse naturelle que le quadrivecteur de genre temps $\underline{e}$ appartienne au 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$ défini par les quadrivecteurs $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_2$, ce qui est le cas pour tous les référentiels présentant un intérêt physique, et nous effectuons le développement multipolaire pour des opérateurs tensoriels d'ordre quelconque. Les coefficients de la décomposition des fonctions de vertex sur la base des harmoniques sphériques tensorielles, appelés facteurs de forme, dépendent de $\underline{q}^2$ et du choix de $\underline{e}$ dans le 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$, et sont du même type que ceux définis par De Rafael. En décomposant les fonctions de vertex sur les multipoles tensoriels irréductibles, nous définissons les facteurs de forme multipolaires irréductibles qui eux aussi dépendent a priori de $\underline{q}^2$ et de $\underline{e}$ mais qui se transforment selon une représentation irréductible si on fait subir au quadrivecteur $\underline{e}$ une transformation de Lorentz pure dans le 2-plan$(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$. Dans le cas d'un opérateur quadrivectoriel on retrouve les résultats de Durand, De Celles et Marr.

Dans le chapitre quatrième, nous étudions les fonctions de vertex

à deux particules finales. En utilisant les états physiques à deux particules, nous construisons des fonctions réduites ayant les mêmes lois de transformation que les fonctions à une particule finale. Alors en appliquant les mêmes méthodes qu'au chapitre précédent, nous définissons des facteurs de forme et des facteurs de forme multipolaires. Dans le cas d'opérateurs quadrivectoriels, nous retrouvons les développements obtenus par Chew, Goldberger, Low et Nambu, et par Adler. Enfin nous relions ce chapitre au précédent à l'aide du modèle isobarique, en supposant que les particules finales proviennent de la désintégration d'un isobare.

Jusqu'ici nous n'avons pas représenté les états physiques. Dans le chapitre cinquième, nous décrivons la polarisation des particules de spin demi-entier à l'aide des spineurs-tenseurs de Rarita-Schwinger et nous représentons l'opérateur quadrivectoriel par le tenseur-matrice le plus général. En décomposant ce tenseur-matrice sur les matrices γ et les impulsions des particules nous définissons les facteurs de forme de Rarita-Schwinger de l'opérateur. En effectuant les traces de matrices γ, nous explicitons les fonctions de vertex et nous en déduisons le lien entre les facteurs de forme multipolaires et ceux de Rarita-Schwinger.

En outre au cours de ces trois chapitres, nous déterminons les conséquences sur ces facteurs de forme, de la conservation de la parité, de l'invariance par renversement du temps et de la conservation du courant vectoriel.

La troisième partie comprend trois chapitres relatifs à quelques problèmes de polarisation étudiés en collaboration avec plusieurs auteurs.

Le chapitre sixième traite des conséquences de la positivité sur les mesures de polarisation et comprend deux articles. Le premier, publié avec G. Massas,L. Michel et P. Minnaert, donne une méthode quantitative d'évaluation de la précision d'une mesure de polarisation et de sa compatibilité avec la condition de positivité. Le second,écrit avec G. Massas

et P. Minnaert, est une extension aux désintégrations fortes à deux amplitudes ($j \to 10$, $j \to 20$, $j \to 3/2\ 0$) des tests de spin rigoureux obtenus par Doncel, Michel, Minnaert pour les désintégrations fortes usuelles à une seule amplitude.

Le chapitre septième est un article écrit en collaboration avec G. Massas et P. Minnaert sur les mesures de spin et de polarisation dans les désintégrations en séquence. En particulier nous montrons que les mesures de spin suggérées par Chung d'une part, et par Ademollo, Gatto et Preparata sont équivalentes, ces derniers n'ayant pu expliciter complètement leur test par suite d'un mauvais choix de variables.

Le chapitre huitième est consacré à l'étude de la production de résonances baryoniques de spin 3/2, sur des cibles de nucléons par interaction électromagnétique ou faible. Nous considérons les réactions induites par des photons, des électrons et des neutrinos. Nous supposons que le nucléon cible n'est pas polarisé et nous déterminons en fonction des facteurs de forme multipolaires du courant hadronique la matrice densité de la résonance.

Pour faciliter la lecture nous avons adopté la structure suivante : les parties comprennent plusieurs chapitres eux-mêmes divisés en sections. Les sections sont numérotées linéairement d'un bout à l'autre et repérées par un nombre, par exemple : Sec.4. Elles sont, elles-mêmes, divisées en paragraphes repérés par deux nombres, le premier étant celui de la section et le second le numéro d'ordre du paragraphe dans la section, par exemple §4-3. Les formules sont numérotées par section. Pour renvoyer à une formule d'une section différente, nous précisons le numéro de la section, par exemple (4-20). Seul le premier chapitre comprend trois appendices repérés par A,B,C. Enfin, les références sont rassemblées à la fin du travail,par ordre alphabétique, et on y renvoie à l'aide du nom de l'auteur et de l'année de publication en abrégé, par exemple [Wig.39].

P R E M I E R E P A R T I E

HARMONIQUES SPHERIQUES TENSORIELLES

ET MULTIPOLES TENSORIELS

CHAPITRE PREMIER

HARMONIQUES SPHERIQUES TENSORIELLES

ET MULTIPOLES TENSORIELS SUR E_3

2 - RAPPELS SUR LES REPRESENTATIONS DU GROUPE DES ROTATIONS

Pour une étude détaillée des représentations du groupe des rotations, nous renvoyons aux références [Wig.59],[Ed.57],[Ros.57],[Br.68]. Dans cette section, nous rappelons les définitions et certaines propriétés des bases sphériques vectorielles, des représentations des rotations et des harmoniques sphériques. Tout ce qui concerne les coefficients de Clebsch-Gordan (CG) et les symboles-3j et -6j est rassemblé dans l'appendice A..

2.1-Base vectorielle sphérique

Trois vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ formant une base cartésienne, orthonormée, directe de l'espace euclidien à trois dimensions E_3, satisfont les relations d'orthogonalité, d'orientation et de fermeture

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad , \tag{1}$$

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) = \epsilon_{ijk} \quad , \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i = \vec{\vec{\delta}} \quad , \tag{3}$$

où $\vec{\vec{\delta}}$ est le tenseur identité de composantes $(\vec{\vec{\delta}})_{ij} = \delta_{ij}$, et ϵ_{ijk} le tenseur de Levi-Civita avec $\epsilon_{123} = 1$. Une telle base sera notée $\{\vec{e}\}$.

Dans la base $\{\vec{e}\}$, une rotation d'angle Ψ autour de l'axe $\vec{e}_3$ est représentée par la matrice

$$R(\Psi, \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos\Psi & -\sin\Psi & 0 \\ \sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

dont les valeurs propres sont $e^{in\Psi}$ où n prend les valeurs +1, 0, -1. Les vecteurs propres associés $\vec{e}_n$, définis par,

$$\vec{e}_o = \vec{e}_3 \quad , \quad \vec{e}_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 \pm i\, \vec{e}_2) \quad , \tag{5}$$

forment la base vectorielle sphérique. Le vecteur $\vec{e}_o$ et les vecteurs complexes $\vec{e}_{\pm}$ satisfont l'identité,

$$(\vec{e}_n)^* = (-1)^n \vec{e}_{-n} \quad , \tag{6}$$

où (*) signifie complexe conjugué, et les relations d'orthogonalité, d'orientation et de fermeture suivantes

$$\vec{e}_m . \vec{e}_n = (-1)^m \delta_{m-n} \quad , \tag{7a}$$

$$\vec{e}^*_m . \vec{e}_n = \delta_{mn} \quad , \tag{7b}$$

$$(\vec{e}_m, \vec{e}_n, \vec{e}_r) = -i\epsilon_{mnr} \quad , \tag{8}$$

$$\sum_n \vec{e}^*_n \otimes \vec{e}_n = \bar{\bar{\delta}} \quad , \tag{9}$$

où ϵ_{mnr} est le tenseur de Levi-Civita pour la base sphérique avec $\epsilon_{+o-} = 1$. Il peut être représenté à l'aide d'un coefficient-CG ou d'un symbole-3j

$$\epsilon_{mnr} = (-1)^{1+r} \sqrt{2} \, \langle 1m1n | 1-r \rangle = - \sqrt{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & n & r \end{pmatrix} \tag{10}$$

A l'aide des relations (6), (7b), (8) et (9), on peut calculer le produit vectoriel de deux vecteurs de la base sphérique

$$\vec{e}_m \wedge \vec{e}_n = -i\epsilon_{mnr} \vec{e}^*_r = i \sqrt{2} \, \langle 1r | 1m1n \rangle \vec{e}_r \quad , \tag{11}$$

avec sommation implicite sur les indices magnétiques répétés.

Soit $\vec{x}$ un vecteur quelconque, ses composantes sphériques x_n sont définies par,

$$x_n = \vec{x} . \vec{e}_n \quad . \tag{12}$$

De la relation de fermeture (9) on déduit le développement du vecteur $\vec{x}$ sur la base sphérique en fonction de ses composantes

$$\vec{x} = x_n \vec{e}^*_n \quad . \tag{13}$$

Le tenseur dual du vecteur $\vec{x}$, noté $\vec{x}\wedge$, est défini par

$$\vec{x}\wedge = (\vec{e}_i, \vec{x}, \vec{e}_j) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = (\vec{e}_m, \vec{x}, \vec{e}_n) \vec{e}^*_m \otimes \vec{e}^*_n \quad . \tag{14}$$

Les tenseurs duaux des vecteurs des bases cartésiennes et sphériques sont

$$\vec{e}_k\wedge = - \epsilon_{kij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad , \tag{15}$$

$$\vec{e}_r\wedge = i\epsilon_{rmn} \vec{e}^*_m \otimes \vec{e}^*_n = i \sqrt{2} \, \langle 1m1n | 1r \rangle \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n \quad . \tag{16}$$

2.2-Représentations d'ordre entier des rotations

Dans la base sphérique $\{\vec{e}\}$, la représentation d'ordre 1 d'une rotation R, est notée $D^1(R,\{\vec{e}\})$ et ses éléments peuvent être définis par

$$D^1(R,\{\vec{e}\})^m_{\ n} = \vec{e}^*_m . R\vec{e}_n \quad . \tag{17}$$

Quand il n'y a pas d'ambiguité, on omet la base dans la notation des représentations, i.e. $D^1(R) = D^1(R,\{\vec{e}\})$.

Les représentations d'ordre entier supérieur se construisent par itération à partir de $D^1(R)$, en couplant les produits tensoriels de représentations à l'aide des coefficients-CG

$$D^2(R)^m{}_n = \langle 2m | 1m'1m'' \rangle\, D^1(R)^{m'}{}_{n'}\, D^1(R)^{m''}{}_{n''}\, \langle 1n'1n'' | 2n \rangle \quad , \qquad (18)$$

$$D^\ell(R)^m{}_n = \langle \ell m | \ell\text{-}1\ m'1m'' \rangle D^{\ell-1}(R)^{m'}{}_{n'} D^1(R)^{m''}{}_{n''} \langle \ell\text{-}1\ n'1n'' | \ell n \rangle \qquad (19)$$

Ces représentations des rotations sont unitaires,

$$D^\ell(R^{-1})^m{}_n = D^\ell(R)^{n\,*}{}_m \quad , \qquad (20)$$

et elles forment un ensemble de fonctions orthogonales pour l'intégration sur les paramètres du groupe, par exemple les angles d'Euler. La relation d'orthogonalité s'écrit

$$\int D^\ell(R)^{m\,*}{}_n\, D^{\ell'}(R)^{m'}{}_{n'}\, dR = \frac{8\pi^2}{2\ell+1}\, \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\delta_{nn'} \quad , \qquad (21)$$

où dR est l'élément de volume des paramètres du groupe.

La définition (17) et la relation de fermeture (9) permettent d'écrire la loi de transformation par rotation des vecteurs de base sphérique à l'aide des représentations d'ordre 1

$$R\,\vec{e}_n = \vec{e}_m\, D^1(R)^m{}_n \quad . \qquad (22)$$

On déduit de cette relation la représentation d'une rotation R dans une base tournée $R'\{\vec{e}\}$ en fonction de sa représentation dans la base $\{\vec{e}\}$, d'abord à l'ordre 1,

$$D^1(R,R'\{\vec{e}\})^m{}_n = D^1(R'^{-1})^m{}_{m'}\, D^1(R)^{m'}{}_{n'}\, D^1(R')^{n'}{}_n \quad , \qquad (23)$$

et ensuite à un ordre quelconque

$$D^\ell(R,R'\{\vec{e}\})^m{}_n = D^\ell(R'^{-1})^m{}_{m'}\, D^\ell(R)^{m'}{}_{n'}\, D^\ell(R')^{n'}{}_n \quad . \qquad (24)$$

Le produit tensoriel de deux représentations d'ordre quelconque se réduit à l'aide des coefficients-CG

$$D^{\ell_1}(R)^{m_1}{}_{n_1}\, D^{\ell_2}(R)^{m_2}{}_{n_2} = \sum_\ell \langle \ell_1 m_1 \ell_2 m_2 | \ell m \rangle\, D^\ell(R)^m{}_n \langle \ell n | \ell_1 n_1 \ell_2 n_2 \rangle \quad . \qquad (25)$$

Une autre formule de réduction utile, faisant intervenir les

représentations de R^{-1} est

$$\langle \ell_1 n_1 | \ell_2 n_2 \ell n \rangle D^{\ell_1}(R)^{m_1}_{n_1} D^{\ell_2}(R^{-1})^{n_2}_{m_2} = \langle \ell_1 m_1 | \ell_2 m_2 \ell m \rangle D^{\ell}(R)^{m}_{n} \quad . \qquad (26)$$

Notons que les relations (24),(25) et (26) sont valables pour des représentations d'ordre demi-entier.

2.3-Harmoniques sphériques

Considérons un vecteur unitaire $\vec{u}$ ($\vec{u}^2 = 1$) et une rotation $R(\vec{u})$ qui applique l'axe $\vec{e}_o$ sur le vecteur $\vec{u}$

$$R(\vec{u})\,\vec{e}_o = \vec{u} \quad . \qquad (27)$$

Les composantes sphériques d'un vecteur unitaire sont des éléments de matrice de représentations particulières. En effet, grâce aux relations (12),(17),(27) et (20), on obtient

$$u_n = D^1[R(\vec{u})]^n_{o\,*} = D^1[R^{-1}(\vec{u})]^o_n \quad . \qquad (28)$$

Les harmoniques sphériques du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\{\vec{e}\}$ sont définies à partir des représentations de $R^{-1}(\vec{u})$ par

$$Y^{\ell}_m(\vec{u},\{\vec{e}\}) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\; D^{\ell}[R^{-1}(\vec{u},\{\vec{e}\})]^o_m \qquad (29)$$

Il faut noter qu'elles peuvent aussi être construites par itération, à partir des composantes sphériques de $\vec{u}$, à l'aide des coefficients-CG

$$Y^1_m(\vec{u}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\; u_m \quad , \qquad (30)$$

$$Y^2_m(\vec{u}) = \sqrt{\frac{5}{2}} \langle 1m'1n|2m\rangle\, Y^1_{m'}(\vec{u})\, u_n \quad , \qquad (31)$$

$$Y^{\ell}_m(\vec{u}) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{\ell}} \langle \ell-1\; m'1n|\ell m\rangle\, Y^{\ell-1}_{m'}(\vec{u})\, u_n \quad . \qquad (32)$$

Ces harmoniques satisfont les identités

$$Y^{\ell}_m(\vec{u})^* = (-1)^m\, Y^{\ell}_{-m}(\vec{u}) \quad , \qquad (33)$$

$$Y^{\ell}_m(-\vec{u}) = (-1)^{\ell}\, Y^{\ell}_m(\vec{u}) \quad . \qquad (34)$$

et elles forment un ensemble de fonctions orthogonales pour l'intégration sur l'orientation du vecteur $\vec{u}$,

$$\int Y^{\ell}_m(\vec{u})^*\, Y^{\ell'}_{m'}(\vec{u})\, d\Omega(\vec{u}) = \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'} \qquad (35)$$

où $d\Omega(\vec{u})$ est l'angle solide élémentaire du vecteur $\vec{u}$.

Le produit d'harmoniques sphériques se réduit à l'aide des coefficients-CG selon

$$Y^{\ell_1}_{m_1} Y^{\ell_2}_{m_2} = \sum_{\ell} \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi\ (2\ell+1)}} \langle \ell 0 | \ell_1 0 \ell_2 0 \rangle \langle \ell m | \ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \rangle\ Y^{\ell}_{m} \quad . \tag{36}$$

Si on effectue une rotation R de la base $\{\vec{e}\}$ ou R^{-1} du vecteur $\vec{u}$, l'équation (22) et la définition des harmoniques sphériques montrent que ces dernières se transforment suivant la loi

$$Y^{\ell}_{m}(R^{-1}\vec{u},\{\vec{e}\}) = Y^{\ell}_{m}(\vec{u},R\{\vec{e}\}) = Y^{\ell}_{m'}(\vec{u},\{\vec{e}\})\ D^{\ell}(R)^{m'}_{m} \quad . \tag{37}$$

Pour l'opération parité P sur le vecteur $\vec{u}$ ou sur la base $\{\vec{e}\}$, la loi de transformation des harmoniques s'écrit

$$Y^{\ell}_{m}(P\vec{u},\{\vec{e}\}) = Y^{\ell}_{m}(\vec{u},P\{\vec{e}\}) = (-1)^{\ell}\ Y^{\ell}_{m}(\vec{u},\{\vec{e}\}) \tag{38}$$

et le signe $(-1)^{\ell}$ est appelé la parité de l'harmonique.

Enfin, grâce aux identités (13) et (30), on peut exprimer le vecteur $\vec{u}$ à l'aide des harmoniques $Y^{1}_{n}(\vec{u})$:

$$\vec{u} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{n} Y^{1}_{n}(\vec{u})\ \vec{e}^{\,*}_{n} \quad . \tag{39}$$

3 - HARMONIQUES SPHERIQUES TENSORIELLES SUR E_3

Les harmoniques sphériques tensorielles d'un vecteur $\vec{u}$ ($\vec{u}^{\,2} = 1$) forment une base de l'espace des fonctions tensorielles de $\vec{u}$, sur l'espace euclidien à trois dimensions, E_3, et se transforment par rotation selon une représentation irréductible. Nous rappelons d'abord les définitions et propriétés des harmoniques sphériques vectorielles [Bl.We.52], [Ro.55],[Ed.57],[Br.Sa.68], et tensorielles d'ordre 2,[Ze.70], puis nous généralisons à un ordre quelconque.

3.1-Harmoniques sphériques vectorielles

Les fonctions vectorielles $Y^{\ell}_{m}(\vec{u})\ \vec{e}_{n}$ forment une base de l'espace des fonctions vectorielles, mais elles se transforment par rotation selon le produit tensoriel de représentations $D^{\ell}(R) \otimes D^{1}(R)$, cf. Sec.2. On définit les harmoniques sphériques vectorielles en couplant les harmoniques sphériques $Y^{\ell}_{m}(\vec{u})$ et les vecteurs de la base sphérique $\vec{e}_{n}$, à l'aide

des coefficients-CG qui réduisent ce produit tensoriel

$$\vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = \langle \ell m 1 n | LM \rangle \; Y^{\ell}_{m}(\vec{u}) \; \vec{e}_{n} \quad , \tag{1}$$

de sorte que ces fonctions vectorielles se transforment par rotation suivant la loi

$$\vec{Y}^{\ell}(\vec{u}, R\{\vec{e}\})^{L}_{M} = \vec{Y}^{\ell}(\vec{u}, \{\vec{e}\})^{L}_{M'} \; D^{L}(R)^{M'}_{M} \quad . \tag{2}$$

Ces harmoniques satisfont les identités

$$\vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L\,*}_{M} = (-1)^{\ell+L+M+1} \; \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{-M} \quad , \tag{3}$$

$$\vec{Y}^{\ell}(-\vec{u})^{L}_{M} = (-1)^{\ell} \; \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} \quad . \tag{4}$$

Cette dernière identité nous permet de déduire les lois de transformation de ces harmoniques par parité

$$\vec{Y}^{\ell}(P\vec{u}, \{\vec{e}\})^{L}_{M} = (-1)^{\ell} \; \vec{Y}^{\ell}(\vec{u}, \{\vec{e}\})^{L}_{M} \quad , \tag{5}$$

$$\vec{Y}^{\ell}(\vec{u}, P\{\vec{e}\})^{L}_{M} = (-1)^{\ell+1} \; \vec{Y}^{\ell}(\vec{u}, \{\vec{e}\})^{L}_{M} \quad , \tag{6}$$

le signe $(-1)^{\ell}$ de l'équation (5) est la <u>parité intrinsèque</u> de l'harmonique tandis que le signe $(-1)^{\ell+1}$ de l'équation (6) est la <u>parité</u> de l'harmonique.

A l'aide des relations (2-8,2-35), on montre que ces fonctions vectorielles sont orthonormalisées,

$$\int \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L\,*}_{M} \cdot \vec{Y}^{\ell'}(\vec{u})^{L'}_{M'} \; d\Omega(\vec{u}) = \delta_{LL'} \; \delta_{MM'} \; \delta_{\ell\ell'} \quad . \tag{7}$$

Les relations (2-7,2-36), les propriétés des coefficients-CG et des symboles-6j, cf. Appendice A , permettent de décomposer le produit scalaire de deux harmoniques vectorielles sur les harmoniques scalaires

$$\vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} \cdot \vec{Y}^{\ell'}(\vec{u})^{L'}_{M'} = (-1)^{L'+\ell'} \sum_{k} \sqrt{\frac{(2L+1)(2\ell+1)(2L'+1)(2\ell'+1)}{4\pi \; (2k+1)}} \langle k0 | \ell 0 \, \ell' 0 \rangle$$

$$\begin{Bmatrix} k & \ell & \ell' \\ 1 & L & L' \end{Bmatrix} \langle kn | LML'M' \rangle \; Y^{k}_{n}(\vec{u}) \quad . \tag{8}$$

Dans le cas particulier où L = M = 0, on a forcément $\ell = 1$, et l'harmonique sphérique vectorielle correspondante, $\vec{Y}^{1}(\vec{u})^{0}_{0}$, est proportionnelle au vecteur $\vec{u}$

$$\vec{Y}^{1}(\vec{u})^{0}_{0} = - \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \; \vec{u} \tag{9}$$

Pour $L \geqslant 1$ et M fixés, on a trois harmoniques vectorielles : la

fonction $\vec{Y}^{L}(\vec{u})^{L}_{M}$ de parité intrinsèque $(-1)^{L}$, et les deux fonctions $\vec{Y}^{L\pm1}(\vec{u})^{L}_{M}$, de parité intrinsèque $(-1)^{L+1}$.

Pour situer l'orientation des trois vecteurs $\vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M}$, considérons le produit scalaire $\vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M}.\vec{Y}^{\ell'}(\vec{u})^{L}_{M}$ obtenu à partir de la formule (8) en faisant L' = L et M' = M. La symétrie du coefficient $\langle k0|LMLM\rangle$ implique que k doit être pair, donc le coefficient $\langle k0|\ell0\ell'0\rangle$ est nul si les parités intrinsèques $(-1)^{\ell}$ et $(-1)^{\ell'}$ sont opposées, donc le vecteur $\vec{Y}^{L}(\vec{u})^{L}_{M}$ est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{Y}^{L\pm1}(\vec{u})^{L}_{M}$,

$$\vec{Y}^{L}(\vec{u})^{L}_{M} \,.\, \vec{Y}^{L\pm1}(\vec{u})^{L}_{M} = 0 \ , \qquad (10)$$

par contre on ne peut rien dire sur l'orientation relative des deux vecteurs $\vec{Y}^{L\pm1}(\vec{u})^{L}_{M}$.

L'orientation des vecteurs $\vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M}$ par rapport au vecteur $\vec{u}$ se déduit des relations (8) et (9),

$$\vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} \,.\, \vec{u} = - \langle \ell0|10L0\rangle \, Y^{L}_{M}(\vec{u}) \quad . \qquad (11)$$

La symétrie du coefficient $\langle \ell0|10L0\rangle$ entraîne que le vecteur $\vec{Y}^{L}(\vec{u})^{L}_{M}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{u}$.

En utilisant la relation (2-11) ainsi que les propriétés des coefficients-CG, on obtient le produit vectoriel d'une harmonique sphérique vectorielle par le vecteur $\vec{u}$,

$$\vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} \wedge \vec{u} = -i \langle \ell0|11L-1\rangle \sum_{k} \left[1 - (-1)^{\ell+k}\right] \langle k0|11L-1\rangle \vec{Y}^{k}(\vec{u})^{L}_{M} \ . \qquad (12)$$

Ces considérations géométriques nous conduiront, au §4-1, à définir les multipoles vectoriels.

En faisant agir les opérateurs vectoriels $\vec{u}$, $r\vec{\nabla}$ et $L = -i\vec{r}\wedge\vec{\nabla}$, , sur les harmoniques scalaires on obtient des combinaisons linéaires d'harmoniques vectorielles s'exprimant à l'aide de coefficients-CG, cf. Appendice B ,

$$\vec{u}\ Y^{L}_{M}(\vec{u}) = - \sum_{\ell} \langle \ell0|10L0\rangle \, \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} \ , \qquad (13)$$

$$r\,\vec{\nabla}\ Y^{L}_{M}(\vec{u}) = \sqrt{L(L+1)} \sum_{\ell} \frac{1-(-1)^{L+\ell}}{\sqrt{2}} \langle \ell0|11L-1\rangle \, \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} \ , \qquad (14)$$

$$\vec{L}\ \vec{Y}^{L}_{M}(\vec{u}) = \sqrt{L(L+1)} \sum_{\ell} \frac{1+(-1)^{L+\ell}}{\sqrt{2}} \langle \ell0|11L-1\rangle \, \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = \sqrt{L(L+1)}\ \vec{Y}^{L}(\vec{u})^{L}_{M} \ . \qquad (15)$$

Le produit d'une harmonique scalaire par une harmonique vectorielle se décompose sur les harmoniques vectorielles à l'aide des symboles-6j suivant

$$Y_m^{\ell_1}(\vec{u})\ \vec{Y}^{\ell_2}(\vec{u})^{L_2}_{M_2} = (-1)^{L_2+\ell_2+1}\sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2L_2+1)(2\ell_2+1)}{4\pi}} \sum_{L,\ell} \langle \ell 0 | \ell_1 0 \ell_2 0\rangle \begin{Bmatrix} \ell & L & 1 \\ L_2 & \ell_2 & \ell_1 \end{Bmatrix} \langle LM | \ell_1 m_1 L_2 M_2\rangle\ \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} \ . \tag{16}$$

Cette relation nous sera utile au §4-2.

3.2-Base tensorielle sphérique d'ordre 2

La base naturelle de l'espace produit tensoriel $E_3 \otimes E_3$ est le produit tensoriel des vecteurs de base $\vec{e}_n \otimes \vec{e}_m$. Ces tenseurs se transforment par rotation selon le produit de représentations $D^1(R) \otimes D^1(R)$. On construit la base tensorielle sphérique d'ordre 2 en couplant les vecteurs de la base sphérique à l'aide des coefficients-CG qui réduisent ce produit tensoriel. On définit ainsi les neuf tenseurs ($j = 0, 1, 2$; $-j \leqslant n \leqslant j$)

$$\vec{\vec{t}}^{\,j}_n = \langle 1 n_1 1 n_2 | j n\rangle\ \vec{e}_{n_1} \otimes \vec{e}_{n_2} \ , \tag{17}$$

qui se transforment par rotation suivant la loi

$$(R \otimes R)\ \vec{\vec{t}}^{\,j}_n = \vec{\vec{t}}^{\,j}_{n'}\ D^j(R)^{n'}_{n} \ . \tag{18}$$

En explicitant les coefficients-CG, on obtient

$$\begin{aligned}
\vec{\vec{t}}^{\,0}_0 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_0 \otimes \vec{e}_0 - \vec{e}_- \otimes \vec{e}_+ - \vec{e}_+ \otimes \vec{e}_-) \\
\vec{\vec{t}}^{\,1}_0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_- \otimes \vec{e}_+ - \vec{e}_+ \otimes \vec{e}_-) \\
\vec{\vec{t}}^{\,1}_{\pm 1} &= \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_0 \otimes \vec{e}_\pm - \vec{e}_\pm \otimes \vec{e}_0) \\
\vec{\vec{t}}^{\,2}_0 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{e}_+ \otimes \vec{e}_- + \vec{e}_- \otimes \vec{e}_+ + 2\vec{e}_0 \otimes \vec{e}_0) \\
\vec{\vec{t}}^{\,2}_{\pm 1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_\pm \otimes \vec{e}_0 + \vec{e}_0 \otimes \vec{e}_\pm) \\
\vec{\vec{t}}^{\,2}_{\pm 2} &= \vec{e}_\pm \otimes \vec{e}_\pm
\end{aligned} \tag{19}$$

Etudions quelques propriétés de ces tenseurs. Ils satisfont l'identité

$$(\vec{\vec{t}}^{\,j}_n)^* = (-1)^{j+n}\ \vec{\vec{t}}^{\,j}_{-n} \ , \tag{20}$$

ainsi que les relations d'orthogonalité

$$\vec{\vec{t}}^{\,j}_{n} : \vec{\vec{t}}^{\,j'}_{n'} = (-1)^{j+n}\, \delta_{jj'}\, \delta_{n-n'} \quad , \tag{21a}$$

$$(\vec{\vec{t}}^{\,j}_{n})^{*} : \vec{\vec{t}}^{\,j'}_{n'} = \delta_{jj'}\, \delta_{nn'} \quad , \tag{21b}$$

où le symbole (:) est le signe de contraction pour deux tenseurs d'ordre 2, par exemple

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) : (\vec{c} \otimes \vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) \quad . \tag{22}$$

Le seul tenseur de trace non nulle est $\vec{\vec{t}}^{\,o}_{o}$,

$$\mathrm{Tr}\ (\vec{\vec{t}}^{\,j}_{n}) \equiv \vec{\vec{\delta}} : \vec{\vec{t}}^{\,j}_{n} = -\sqrt{3}\, \delta_{jo}\, \delta_{no} \quad , \tag{23}$$

et la relation de fermeture (2-9) montre qu'il est proportionnel au tenseur identité

$$\vec{\vec{t}}^{\,o}_{o} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ \vec{\vec{\delta}} \quad . \tag{24}$$

Les tenseurs $\vec{\vec{t}}^{\,o}_{o}$ et $\vec{\vec{t}}^{\,2}_{n}$ sont symétriques, tandis que les tenseurs $\vec{\vec{t}}^{\,1}_{n}$ sont antisymétriques et duaux des vecteurs de la base sphérique comme le montre l'équation (2-16)

$$\vec{\vec{t}}^{\,1}_{n} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\ \vec{e}_{n} \wedge \quad . \tag{25}$$

Le produit tensoriel du vecteur $\vec{u}$ par lui-même peut être décomposé sur la base tensorielle sphérique. En utilisant les relations (2-39,2-36) et (17), on obtient

$$\vec{u} \otimes \vec{u} = \sum_{j} \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}\, \langle j0 | 1010 \rangle \sum_{n} Y^{j}_{n}(\vec{u})\ \vec{\vec{t}}^{\,j\,*}_{n} \tag{26}$$

La relation d'orthogonalité (22) permet d'inverser cette relation. On montre ainsi que le produit saturé d'un tenseur de base par le vecteur $\vec{u}$, est proportionnel à une harmonique scalaire

$$\vec{\vec{t}}^{\,j}_{n} : (\vec{u} \otimes \vec{u}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}\, \langle j0 | 1010 \rangle\, Y^{j}_{n}(\vec{u}) \quad . \tag{27}$$

De manière analogue, en contractant un tenseur de base avec le vecteur $\vec{u}$, on obtient une harmonique vectorielle à un coefficient près

$$\vec{\vec{t}}^{\,j}_{n} .\vec{u} = (-1)^{j} \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\ \vec{Y}^{1}(\vec{u})^{j}_{n} \quad . \tag{28}$$

3.3-Harmoniques sphériques tensorielles d'ordre 2

Comme pour les vecteurs, on construit les harmoniques sphériques tensorielles en couplant les tenseurs de base sphérique avec les harmoniques sphériques, à l'aide des coefficients-CG

$$\vec{\vec{Y}}^{\ell j}(\vec{u})^{L}_{M} = \langle \ell m j n | LM \rangle \, Y^{\ell}_{m}(\vec{u}) \, \vec{\vec{t}}^{\,j}_{n} \quad , \tag{29}$$

de sorte que ces harmoniques se transforment par rotation suivant la loi

$$\vec{\vec{Y}}^{\ell j}(\vec{u}, R\{\vec{e}\})^{L}_{M} = \vec{\vec{Y}}^{\ell j}(\vec{u}, \{\vec{e}\})^{L}_{M'} \, D^{L}(R)^{M'}_{M} \quad . \tag{30}$$

Cette relation se déduit des équations (18) et (2-37,2-25). Ces harmoniques satisfont les identités

$$\vec{\vec{Y}}^{\ell j}(\vec{u})^{L\,*}_{M} = (-1)^{\ell+L+M+j} \, \vec{\vec{Y}}^{\ell j}(\vec{u})^{L}_{-M} \quad , \tag{31}$$

$$\vec{\vec{Y}}^{\ell j}(-\vec{u})^{L}_{M} = (-1)^{\ell} \, \vec{\vec{Y}}^{\ell j}(\vec{u})^{L}_{M} \quad . \tag{32}$$

Cette dernière identité nous permet d'écrire la loi de transformation par parité de ces harmoniques

$$\vec{\vec{Y}}^{\ell j}(P\vec{u}, \{\vec{e}\})^{L}_{M} = \vec{\vec{Y}}^{\ell j}(\vec{u}, P\{\vec{e}\})^{L}_{M} = (-1)^{\ell} \, \vec{\vec{Y}}^{\ell j}(\vec{u}, \{\vec{e}\})^{L}_{M} \quad , \tag{33}$$

où le signe $(-1)^{\ell}$ est appelé la parité intrinsèque ou la parité de l'harmonique, car ces deux notions coïncident pour les tenseurs du second ordre.

Les relations (21b) et (2-35) montrent que ces fonctions tensorielles sont orthonormalisées

$$\int \vec{\vec{Y}}^{\ell j}(\vec{u})^{L\,*}_{M} : \vec{\vec{Y}}^{\ell' j'}(\vec{u})^{L'}_{M'} \, d\Omega(\vec{u}) = \delta_{\ell\ell'} \, \delta_{jj'} \, \delta_{LL'} \, \delta_{MM'} \quad . \tag{34}$$

A l'aide des symboles-6j, on peut décomposer le produit contracté de deux harmoniques tensorielles sur les harmoniques scalaires suivant la formule

$$\vec{\vec{Y}}^{\ell j}(\vec{u})^{L}_{M} : \vec{\vec{Y}}^{\ell' j'}(\vec{u})^{L'}_{M'} = \delta_{jj'} (-1)^{L'+\ell'+j'} \sum_{k} \sqrt{\frac{(2L+1)(1L'+1)(2\ell+1)(2\ell'+1)}{4\pi \, (2k+1)}} \tag{35}$$

$$\langle k0 | \ell 0 \ell' 0 \rangle \begin{Bmatrix} k & \ell & \ell' \\ j & D & L \end{Bmatrix} \langle kn | LMLM' \rangle \, Y^{k}_{n}(\vec{u}) \quad .$$

Considérons les diverses harmoniques tensorielles pour L et M fixés. Dans le cas particulier où L = M = 0, on a forcément $\ell = j = 0,1,2$. On a donc les trois harmoniques suivantes

$$\vec{\vec{Y}}^{jj}(\vec{u})^{o}_{o} = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{n} Y^{j}_{n}(\vec{u}) \, \vec{\vec{t}}^{\,j\,*}_{n} \quad . \tag{36}$$

Pour L supérieur ou égal à 2 et M fixés, on a neuf harmoniques tensorielles que l'on peut classer en trois groupes selon les valeurs de j :

i) j = 0, ℓ = L. D'après (24), l'harmonique $\vec{\vec{Y}}^{Lo}(\vec{u})^{L}_{M}$ est proportionnelle

au tenseur identité,

$$\overrightarrow{\overrightarrow{Y}}^{Lo}(\vec{u})^{L}_{M} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ Y^{L}_{M}(\vec{u})\ \overrightarrow{\overrightarrow{\delta}} \quad . \tag{37}$$

ii) $j = 1$, $\ell = L, L\pm1$. Les trois tenseurs antisymétriques $\overrightarrow{\overrightarrow{Y}}^{L1}(\vec{u})^{L}_{M}$ de parité $(-1)^{L}$, et $\overrightarrow{\overrightarrow{Y}}^{L\pm11}(\vec{u})^{L}_{M}$ de parité $(-1)^{L+1}$, sont duaux des harmoniques sphériques vectorielles à cause de l'équation (25),

$$\overrightarrow{\overrightarrow{Y}}^{\ell 1}(\vec{u})^{L}_{M} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\ Y^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} \quad . \tag{38}$$

iii) $j = 2$, $\ell = L, L\pm1, L\pm2$. On a cinq tenseurs symétriques de trace nulle $\overrightarrow{\overrightarrow{Y}}^{L2}(\vec{u})^{L}_{M}$, $\overrightarrow{\overrightarrow{Y}}^{L\pm22}(\vec{u})^{L}_{M}$ de parité $(-1)^{L}$, et $\overrightarrow{\overrightarrow{Y}}^{L\pm12}(\vec{u})^{L}_{M}$ de parité $(-1)^{L+1}$.

Etudions les propriétés géométriques de ces harmoniques à L et M fixés. Leur produit [illegible] contracté obtenu à partir de la relation (35) montre que les tenseurs de j différents ou de parités opposées sont orthogonaux

$$j \neq j' \text{ ou } (-1)^{\ell} \neq (-1)^{\ell'} \ , \quad \overrightarrow{\overrightarrow{Y}}^{\ell j}(\vec{u})^{L}_{M} : \overrightarrow{\overrightarrow{Y}}^{\ell' j'}(\vec{u})^{L}_{M} = 0 \ . \tag{39}$$

Mais on ne peut rien dire sur l'orientation relative des tenseurs ayant même j ou même parité.

En utilisant les identités (28),(16) et les propriétés des symboles-6j, on obtient le produit contracté des harmoniques tensorielles avec le vecteur $\vec{u}$,

$$\overrightarrow{\overrightarrow{Y}}^{\ell j}(\vec{u})^{L}_{M}.\vec{u} = (-1)^{L+\ell+j} \sum_{k} \langle k0|\,10L0\rangle \sqrt{(2j+1)(2\ell+1)} \begin{Bmatrix} k & 1 & L \\ j & \ell & 1 \end{Bmatrix} \overrightarrow{Y}^{k}(\vec{u})^{L}_{M} \ . \tag{40}$$

Cette relation n'indique aucune propriété particulière des harmoniques par rapport au vecteur $\vec{u}$.

De même, les formules (27) et (2-36) permettent de déterminer le produit saturé d'une harmonique tensorielle par le vecteur $\vec{u}$, il vient

$$\overrightarrow{\overrightarrow{Y}}^{\ell j}(\vec{u})^{L}_{M} : (\vec{u} \otimes \vec{u}) = \langle \ell 0|\, jOL0\rangle\langle j0|\,1010\rangle\ Y^{L}_{M}(\vec{u}) \quad . \tag{41}$$

On remarque que ce produit est nul, si j est impair ou si l'harmonique a la parité $(-1)^{\ell} = (-1)^{L+1}$.

Ces considérations géométriques nous amèneront, au§4-2, à définir les multipoles tensoriels du second ordre.

En faisant agir tensoriellement les opérateurs vectoriels $\vec{u}$, $r\vec{\nabla}$ et $\vec{L}$ sur les harmoniques vectorielles, on obtient des combinaisons

linéaires d'harmoniques tensorielles qui s'expriment en fonction de symboles-6j et de coefficients-CG, cf. Appendice B ,

$$\vec{u} \otimes \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = (-1)^{L+\ell} \sum_{k,j} \langle k0|10\ell 0\rangle \sqrt{(2j+1)(2\ell+1)} \begin{Bmatrix} \ell & 1 & L \\ j & k & 1 \end{Bmatrix} \vec{\vec{Y}}^{kj}(\vec{u})^{L}_{M}, \quad (42)$$

$$r\,\vec{\nabla} \otimes \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = (-1)^{L+\ell} \sqrt{\ell(\ell+1)} \sum_{k,j} \frac{(-1)^{\ell+k} - 1}{\sqrt{2}} \langle k0|11\ \ell-1\rangle \quad (43)$$

$$\sqrt{(2j+1)(2\ell+1)} \begin{Bmatrix} \ell & 1 & L \\ j & k & 1 \end{Bmatrix} \vec{\vec{Y}}^{kj}(\vec{u})^{L}_{M} ,$$

$$\vec{L} \otimes \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = (-1)^{L+\ell} \sqrt{\ell(\ell+1)} \sum_{k,j} \frac{(-1)^{\ell+k} + 1}{\sqrt{2}} \langle k0|11\ell-1\rangle$$

$$\sqrt{(2j+1)(2\ell+1)} \begin{Bmatrix} \ell & 1 & L \\ j & k & 1 \end{Bmatrix} \vec{\vec{Y}}^{kj}(\vec{u})^{L}_{M} , \quad (44)$$

$$= (-1)^{L+\ell} \sqrt{\ell(\ell+1)} \sum_{j} \sqrt{(2j+1)(2\ell+1)} \begin{Bmatrix} \ell & 1 & L \\ j & \ell & 1 \end{Bmatrix} \vec{\vec{Y}}^{\ell j}(\vec{u})^{L}_{M}$$

3.4-Base tensorielle sphérique d'ordre quelconque

Les bases tensorielles sphériques sont construites par un procédé itératif à partir de la base sphérique vectorielle $\vec{e}_n$. Nous avons vu que les tenseurs d'ordre 1 et 2 sont

$$\vec{t}_m = \langle 001n|1m\rangle \vec{e}_n \equiv \vec{e}_m , \quad (45a)$$

$$\vec{\vec{t}}^{j}_{m} = \langle 1m'1n|j_2 m\rangle \vec{t}_{m'} \otimes \vec{e}_n . \quad (45b)$$

Les tenseurs d'ordre $r > 2$, notés $\overset{r\rightarrow}{t}$, sont construits à partir des tenseurs d'ordre r-1, $\overset{r-1\rightarrow}{t}$, et des vecteurs $\vec{e}_n$

$$\overset{r\rightarrow}{t}{}^{j_r \cdots j_2}_{m} = \langle j_{r-1} m'1n|j_r m\rangle \ \overset{r-1\rightarrow}{t}{}^{j_{r-1} \cdots j_2}_{m'} \otimes \vec{e}_n , \quad (46)$$

de sorte qu'ils se transforment par rotation suivant la loi

$$(\overset{r}{\otimes} R)\ \overset{r\rightarrow}{t}{}^{j_r \cdots}_{m} = \overset{r\rightarrow}{t}{}^{j_r \cdots}_{m'} D^{j_r}(R)^{m'}_{m} , \quad (47)$$

qui se déduit des relations (2-22) et (2-25).

Ces tenseurs satisfont l'identité

$$\overset{r\rightarrow}{t}{}^{j_r \cdots *}_{m} = (-1)^{j_r+m+r} \overset{r\rightarrow}{t}{}^{j_r \cdots}_{-m} , \quad (48)$$

ainsi que les relations d'orthogonalité déduites des Eq.(2-6,7,8),

$$ {}^{r}\vec{t}^{\,j_r\cdots}_{m}(\overset{r}{\cdot}){}^{r}\vec{t}^{\,j'_r\cdots}_{m'} = \prod_{i=2}^{r}\delta_{j_i\,j'_i}(-1)^{j_r+m+r}\,\delta_{m\,-m'} \quad , \tag{49} $$

$$ {}^{r}\vec{t}^{\,j_r\cdots *}_{m}(\overset{r}{\cdot}){}^{r}\vec{t}^{\,j'_r\cdots}_{m'} = \prod_{i=2}^{r}\delta_{j_i\,j'_i}\,\delta_{m m'} \quad , \tag{50} $$

où le symbole $(\overset{r}{\cdot})$ est le signe de contraction de deux tenseurs d'ordre r.

On peut généraliser à l'ordre r, les relations (2-39) pour l'ordre 1 et (26) pour l'ordre 2, en projetant le produit tensoriel $\overset{r}{\otimes}\vec{u}$ du vecteur $\vec{u}$ r fois par lui-même, sur les tenseurs de base sphérique, on obtient

$$ \overset{r}{\otimes}\vec{u} = \sum_{j_2\cdots j_r}\sqrt{\frac{4\pi}{2j_r+1}}\Big(\prod_{k=2}^{r}\langle j_k 0|\,j_{k-1}0\,10\rangle\Big)\sum_{m}Y_m^{j_r}(\vec{u})\;\;{}^{r}\vec{t}^{\,j_r\cdots *}_{m} \quad . \tag{51} $$

En inversant cette expression à l'aide de la relation d'orthogonalité (50) les sommations disparaissent, et l'on a

$$ (\overset{r}{\otimes}\vec{u})(\overset{r}{\cdot})\;{}^{r}\vec{t}^{\,j_r\cdots}_{m} = \sqrt{\frac{4\pi}{2j_r+1}}\Big(\prod_{k=2}^{r}\langle jk0|\,j_{k-1}0\,10\rangle\Big)\;Y_m^{j_r}(\vec{u}) \tag{52} $$

Parmi ces tenseurs de base sphérique, les tenseurs obtenus par les couplages maximaux, (i.e. $j_2 = 2, \ldots j_k = k, \ldots j_r = r$) sont appelés tenseurs maximaux et notés ${}^{r}\vec{t}^{\,r}_{m}$. Ces tenseurs maximaux ont des propriétés remarquables, ils sont complètement symétriques et de trace nulle, c'est-à-dire

$$ ({}^{r}\vec{t}^{\,r}_{m})^{i_1\cdots i_k\cdots i_l\cdots i_r} = ({}^{r}\vec{t}^{\,r}_{m})^{i_1\cdots i_k\cdots i_l\cdots i_r} \quad , \tag{53} $$

$$ ({}^{r}\vec{t}^{\,r}_{m})^{i_1\cdots i_k\cdots i_l\cdots i_r}\,\delta_{i_k\,i_l} = 0 \quad . \tag{54} $$

Les relations (2-17,18,19) permettent d'exprimer à l'aide de ces tenseurs les représentations d'ordre entier d'une rotation R.

$$ D^{\ell}(R)^{m}_{\;n} = {}^{\ell}\vec{t}^{\,\ell *}_{m}(\overset{\ell}{\cdot})(\overset{\ell}{\otimes}R)\;\;{}^{\ell}\vec{t}^{\,\ell}_{n} \quad . \tag{55} $$

En outre, dans le cas des tenseurs maximaux, en calculant le produit de coefficients-CG de la formule (52), on déduit une expression des harmoniques scalaires à partir du vecteur $\vec{u}$ et de ces tenseurs

$$ Y_m^{\ell}(\vec{u}) = C_{\ell}\;\;{}^{\ell}\vec{t}^{\,\ell}_{m}(\overset{\ell}{\cdot})(\overset{\ell}{\otimes}\vec{u}) \quad , \tag{56} $$

où la constante C_{ℓ} est donnée par

$$ C_{\ell} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\cdot\sqrt{\frac{(2\ell+1)!!}{\ell!}} \quad . \tag{57} $$

3.5-Harmoniques sphériques tensorielles d'ordre quelconque

Les harmoniques sphériques tensorielles sont construites de la même manière que celles d'ordre 2, en couplant les tenseurs de base sphérique avec les harmoniques sphériques

$$ {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r \cdots j_2}(\vec{u})^{L}_{M} = \langle \ell m j_r n | LM \rangle \, Y^{\ell}_{m}(\vec{u}) \quad {}^{r}\vec{t}^{\,j_r \cdots j_2}_{n} \, . \tag{58} $$

Par rotation ces harmoniques se transforment suivant la loi

$$ {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r \cdots}(\vec{u}, R\{\vec{e}\})^{L}_{M} = {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r \cdots}(\vec{u}, \{\vec{e}\})^{L}_{M'} \, D^{L}(R)^{M'}_{\ M} \, , \tag{59} $$

et elles satisfont les identités

$$ {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r \cdots}(\vec{u})^{L\,*}_{M} = (-1)^{\ell + r + j_r + L + M} \, {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r \cdots}(\vec{u})^{L}_{-M} \, , \tag{60} $$

$$ {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r \cdots}(-\vec{u})^{L}_{M} = (-1)^{\ell} \, {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r \cdots}(\vec{u})^{L}_{M} \, . \tag{61} $$

Cette dernière identité nous permet de déduire les lois de transformation de ces harmoniques par parité

$$ {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r \cdots}(P\vec{u}, \{\vec{e}\})^{L}_{M} = (-1)^{\ell} \, {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r \cdots}(\vec{u}, \{\vec{e}\})^{L}_{M} \, , \tag{62} $$

$$ {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r \cdots}(\vec{u}, P\{\vec{e}\})^{L}_{M} = (-1)^{\ell + r} \, {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r \cdots}(\vec{u}, \{\vec{e}\})^{L}_{M} \, ; \tag{63} $$

le signe $(-1)^{\ell}$ qui apparaît dans l'équation (62) est la <u>parité intrinsèque</u> de l'harmonique tandis que celui qui apparaît dans l'équation (63), $(-1)^{\ell+r}$, est la <u>parité de</u> l'harmonique.

L'orthonormalité des tenseurs de base, Eq.(50), et des harmoniques scalaires (2-35), entraîne que ces fonctions tensorielles satisfont la relation d'orthonormalité :

$$ \int {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r \cdots}(\vec{u})^{L\,*}_{M}(\cdot) \, {}^{r}\vec{Y}^{\ell' j_r' \cdots}(\vec{u})^{L'}_{M'} \, d\Omega(\vec{u}) = \delta_{\ell\ell'} \left(\prod_{i=2}^{r} \delta_{j_i j_i'} \right) \delta_{LL'} \, \delta_{MM'} \, . \tag{64} $$

En utilisant les symboles-6j, on peut exprimer le produit contracté de deux harmoniques tensorielles d'ordre r, en fonction des harmoniques scalaires suivant la formule

$$ {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r}_{M}\cdots(\vec{u})^{L}_{M}(\overset{r}{\cdot})\,{}^{r}\vec{Y}^{\ell' j'_r}\cdots\vec{(u)}^{L'}_{M'} = \Big(\prod_{i=2}^{r}\delta_{j_i j'_i}\Big)(-1)^{r+j'_r+\ell'+L'} $$

$$ \sum_{k}\sqrt{\frac{(2L+1)(2L'+1)(2\ell+1)(2\ell'+1)}{4\pi\,(2k+1)}}\,\langle k0|\ell0\ell'0\rangle\begin{Bmatrix} k & \ell & \ell' \\ j_r & L' & L\end{Bmatrix}\langle kn|LML'M'\rangle Y^{k}_{n}(\vec{u}). \qquad (65) $$

Pour situer l'orientation relative des tenseurs ${}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r}\cdots(\vec{u})^{L}_{M}$, à L et M fixés, pour les diverses valeurs de ℓ, j_2, ...j_r, on considère leurs produits contractés déduits de l'expression précédente. Si les tenseurs ont des parités opposées ou s'il existe au moins une valeur de i telle que $j_i \neq j'_i$, ils sont orthogonaux.

En contractant une harmonique d'ordre r avec le vecteur $\vec{u}$, on obtient une combinaison linéaire d'harmoniques d'ordre r-1,

$$ {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r}\cdots(\vec{u})^{L}_{M}.\vec{u} = (-1)^{r+j_r+\ell+L}\sum_{k}\langle k0|10\ell0\rangle\sqrt{(2j_r+1)(2\ell+1)}\begin{Bmatrix} k & j_{r-1} & L \\ j_r & \ell & 1\end{Bmatrix} {}^{r-1}\vec{Y}^{kj_{r-1}}\cdots(\vec{u})^{L}_{M} \qquad (66) $$

En outre en utilisant les équations (52) et (2-36) on peut calculer le produit saturé d'une harmonique par le vecteur $\vec{u}$

$$ {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_r}\cdots(\vec{u})^{L}_{M}\,(\overset{r}{\cdot})(\overset{r}{\otimes}\vec{u}) = (-1)^{j_r}\langle\ell0|j_r0L0\rangle\Big(\prod_{k=2}^{r}\langle j_k0|j_{k-1}010\rangle\Big)Y^{L}_{M}(\vec{u}). \qquad (67) $$

Pour que ces produits ne soient pas nuls, les propriétés de symétrie des coefficients-CG imposent $(-1)^{j} = (-1)^{k}$ pour k = 2 à r et $(-1)^{\ell} = (-1)^{L+r}$.

Dans la section suivante, nous définissons d'autres fonctions tensorielles, appelées multipoles tensoriels qui ont de meilleures propriétés géométriques que les harmoniques.

4 - MULTIPOLES TENSORIELS SUR E_3

Dans la section précédente, nous avons défini les harmoniques sphériques tensorielles et nous avons étudié leurs lois de transformation par rotation et par parité, ainsi que leurs propriétés géométriques. Dans cette section, nous définissons de nouvelles fonctions tensorielles, les multipoles, qui ont les mêmes lois de transformation que les

harmoniques mais qui ont de meilleures propriétés géométriques que celles-ci. Comme pour les harmoniques, nous construirons successivement les multipoles d'ordre 1 et 2 puis nous généralisons à un ordre quelconque.

4.1- Multipoles vectoriels

Les multipoles vectoriels sont des combinaisons linéaires orthonormées d'harmoniques sphériques vectorielles de même parité. Les scalaires de ces combinaisons sont les coefficients-CG de sorte que, pour L et M fixés, les multipoles soient des vecteurs deux à deux orthogonaux, proportionnels ou perpendiculaires au vecteur $\vec{u}$.

Les multipoles vectoriels $\vec{X}_\mu(\vec{u})^L_M$, $(\mu = +, 0, -)$ sont définis par les relations

$$\vec{X}_o(\vec{u})^L_M = \sum_\ell \langle \ell 0 | 10 L 0 \rangle \, \vec{Y}^\ell(\vec{u})^L_M \qquad (1a)$$

$$\vec{X}_\pm(\vec{u})^L_M = \sum_\ell \frac{1 \pm (-1)^{\ell+L}}{\sqrt{2}} \langle \ell 0 | 11 L -1 \rangle \, \vec{Y}^\ell(\vec{u})^L_M \qquad (1b)$$

En calculant les coefficients-CG, on peut expliciter ce changement de fonctions vectorielles

$$\vec{X}_+(\vec{u})^L_M = \vec{Y}^L(\vec{u})^L_M \qquad (2a)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{X}_o(\vec{u})^L_M \\ \vec{X}_-(\vec{u})^L_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} & -\sqrt{\frac{L}{2L+1}} \\ \sqrt{\frac{L}{2L+1}} & \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{Y}^{L+1}(\vec{u})^L_M \\ \vec{Y}^{L-1}(\vec{u})^L_M \end{pmatrix} \qquad (2b)$$

Ce changement de fonctions étant une transformation orthogonale, les multipoles satisfont la même relation d'orthogonalité que les harmoniques vectorielles

$$\int \vec{X}_\mu(\vec{u})^{L\,*}_M \cdot \vec{X}_{\mu'}(\vec{u})^{L'}_{M'} \, d\Omega(\vec{u}) = \delta_{\mu\mu'} \, \delta_{LL'} \, \delta_{MM'} \qquad (3)$$

De plus, comme les multipoles sont des combinaisons d'harmoniques à L et M fixés, ils se transforment de la même manière par rotation

$$\vec{X}_\mu(\vec{u}, R\{\vec{e}\})^L_M = \vec{X}_\mu(\vec{u}, \{\vec{e}\})^L_{M'} \, D^L(R)^{M'}_{\ M} \, . \qquad (4)$$

La parité intrinsèque ϵ_μ et la parité η_μ de ces multipoles vectoriels sont définies par

$$\vec{X}_\mu(P\vec{u},\{\vec{e}\})^L_M = \epsilon_\mu \vec{X}_\mu(\vec{u},\{\vec{e}\})^L_M \qquad (5)$$

$$\vec{X}_\mu(\vec{u},P\{\vec{e}\})^L_M = \eta_\mu \vec{X}_\mu(\vec{u},\{\vec{e}\})^L_M \qquad (6)$$

La définition des multipoles et les lois de transformation des harmoniques vectorielles par parité (3-5,6) permettent de déterminer ϵ_μ et η_μ :

$$\epsilon_\mu = -\eta_\mu = (-1)^L \quad \text{si } \mu = +1 \quad , \qquad (7)$$
$$= (-1)^{L+1} \quad \text{si } \mu = 0 \text{ ou } -1 \quad .$$

Etudions les propriétés géométriques de ces multipoles vectoriels. En utilisant l'équation (3-8), les propriétés des symboles-6j et la symétrie des coefficients-CG, on montre que, pour L et M fixés, les trois multipoles sont des vecteurs deux à deux perpendiculaires

$$\vec{X}_\mu(\vec{u})^L_M \cdot \vec{X}_{\mu'}(\vec{u})^L_M = \eta_\mu \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \sum_k \langle L\mu | L\mu' k0 \rangle \langle kn | LMLM \rangle \, Y^k_n(\vec{u}) \quad . \qquad (8)$$

Il résulte de l'équation (3-11) que les multipoles $\vec{X}_\pm(\vec{u})^L_M$ sont perpendiculaires au vecteur $\vec{u}$

$$\vec{X}_\pm(\vec{u})^L_M \cdot \vec{u} = 0 \quad , \qquad (9)$$

et on déduit de l'équation (3-12) l'identité

$$\vec{X}_\pm(\vec{u})^L_M \wedge \vec{u} = -i \vec{X}_\pm(\vec{u})^L_M \quad . \qquad (10)$$

L'équation (3-13) montre que le multipole $\vec{X}_o(\vec{u})^L_M$, est proportionnel au vecteur $\vec{u}$

$$\boxed{\vec{X}_o(\vec{u})^L_M = - Y^L_M(\vec{u})\, \vec{u}} \qquad (11)$$

tandis que les identités (3-14,15) permettent d'obtenir les multipoles $\vec{X}_\pm(\vec{u})^L_M$ par action des opérateurs différentiels $r\vec{\nabla}$ et $\vec{L}$ sur les harmoniques scalaires

$$\boxed{\vec{X}_+(\vec{u})^L_M = \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}} \vec{L}\, Y^L_M(\vec{u})} \qquad (12)$$

$$\boxed{\vec{X}_-(\vec{u})^L_M = \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}} r\vec{\nabla}\, Y^L_M(\vec{u})} \qquad (13)$$

En électromagnétisme* les multipoles de parité intrinsèque $(-1)^L$ sont appelés magnétiques ($\mathcal{M}$) et ceux de parité intrinsèque $(-1)^{L+1}$ électriques ($\mathcal{E}$). En utilisant les indices $\mathcal{L}$ et $\mathcal{T}$ pour longitudinal (proportionnel à $\vec{u}$) et transverse (perpendiculaire à $\vec{u}$), on note les

* cf. Appendice C.

multipoles vectoriels

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_{\varepsilon}(\vec{u})^{L}_{M} &= \vec{X}_{+}(\vec{u})^{L}_{M} \\ \vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{L}}(\vec{u})^{L}_{M} &= \vec{X}_{o}(\vec{u})^{L}_{M} \\ \vec{\mathcal{E}}_{\varepsilon}(\vec{u})^{L}_{M} &= \vec{X}_{-}(\vec{u})^{L}_{M} \end{aligned}} \qquad (14)$$

On peut résumer les propriétés géométriques de ces multipoles par les relations

$$\vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{L}}(\vec{u})^{L}_{M} = - Y^{L}_{M}(\vec{u})\,\vec{u} \quad , \qquad (15a)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\varepsilon}(\vec{u})^{L}_{M} = -i\,\vec{u} \wedge \vec{\mathcal{M}}_{\varepsilon}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \qquad (15b)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{\varepsilon}(\vec{u})^{L}_{M} = -i\,\vec{u} \wedge \vec{\mathcal{E}}_{\varepsilon}(\vec{u})^{L}_{M} \quad . \qquad (15c)$$

4.2-Multipoles tensoriels d'ordre 2

Les multipoles tensoriels d'ordre 2 sont des combinaisons linéaires orthonormales d'harmoniques sphériques tensorielles d'ordre 2, de même parité et de même valeur de j. Les scalaires de ces combinaisons sont des coefficients-CG, de telle sorte que, pour L et M fixés, les multipoles soient des tenseurs deux à deux orthogonaux.

Nous définissons les multipoles tensoriels d'ordre 2, $\vec{\vec{X}}^{j}_{\mu}(\vec{u})^{L}_{M}$, $(j = 0, 1, 2\ ;\ \mu = -j, \ldots +j)$ par les relations

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\vec{X}}^{j}_{o}(\vec{u})^{L}_{M} &= \sum_{\ell} \langle \ell 0 | j 0 L 0 \rangle\ \vec{\vec{Y}}^{\ell j}(\vec{u})^{L}_{M} && (16a) \\ \vec{\vec{X}}^{j}_{\pm\mu}(\vec{u})^{L}_{M} &= \sum_{\ell} \frac{1 \pm (-1)^{L+\ell}}{\sqrt{2}} \langle \ell 0 | j \mu L - \mu \rangle\ \vec{\vec{Y}}^{\ell j}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \quad \mu > 0 && (16b) \end{aligned}}$$

En calculant les coefficients-CG, on peut expliciter le passage des multipoles aux harmoniques, voir tableau (17).

Ce changement de fonctions tensorielles est une transformation orthogonale de sorte que, comme les harmoniques, les multipoles tensoriels forment une base de fonctions orthonormées

$$\int \vec{\vec{X}}^{j}_{\mu}(\vec{u})^{L}_{M}{}^{*} : \vec{\vec{X}}^{j'}_{\mu'}(\vec{u})^{L'}_{M'}\, d\Omega(\vec{u}) = \delta_{jj'}\, \delta_{\mu\mu'}\, \delta_{LL'}\, \delta_{MM'} \qquad (18)$$

$$\vec{\vec{X}}^{o}_{o} = \vec{\vec{Y}}^{LO} \quad , \quad \vec{\vec{X}}^{1}_{+1} = \vec{\vec{Y}}^{L1}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\vec{X}}^{1}_{o} \\ \vec{\vec{X}}^{1}_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} & -\sqrt{\frac{L}{2L+1}} \\ \sqrt{\frac{L}{2L+1}} & \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\vec{Y}}^{L+1\,1} \\ \vec{\vec{Y}}^{L-1\,1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\vec{X}}^{2}_{-1} \\ \vec{\vec{X}}^{2}_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{L+2}{2L+1}} & -\sqrt{\frac{L-1}{2L+1}} \\ \sqrt{\frac{L-1}{2L+1}} & \sqrt{\frac{L+2}{2L+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\vec{Y}}^{L+1\,2} \\ \vec{\vec{Y}}^{L-1\,2} \end{pmatrix} \qquad (17)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\vec{X}}^{2}_{+2} \\ \vec{\vec{X}}^{2}_{+1} \\ \vec{\vec{X}}^{2}_{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{L(L-1)}{2(2L+1)(2L+3)}} & \sqrt{\frac{3(L-1)(L+2)}{(2L-1)(2L+3)}} & \sqrt{\frac{(L+1)(L+2)}{2(2L-1)(2L+1)}} \\ \sqrt{\frac{2L(L+2)}{(2L+1)(2L+3)}} & \sqrt{\frac{3}{(2L-1)(2L+3)}} & -\sqrt{\frac{2(L+1)(L-1)}{(2L-1)(2L+1)}} \\ \sqrt{\frac{3(L+1)(L+2)}{2(2L+1)(2L+3)}} & -\sqrt{\frac{L(L+1)}{(2L-1)(2L+3)}} & \sqrt{\frac{3L(L-1)}{2(L-1)(2L+1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\vec{Y}}^{L+2\,2} \\ \vec{\vec{Y}}^{L\,2} \\ \vec{\vec{Y}}^{L-2\,2} \end{pmatrix}$$

A cause de leur construction à L et M fixés, les multipoles ont les mêmes lois de transformation par rotation que les harmoniques tensorielles

$$\vec{\vec{X}}^{j}_{\mu}(\vec{u}, R\{\vec{e}\})^{L}_{M} = \vec{\vec{X}}^{j}_{\mu}(\vec{u}, \{\vec{e}\})^{L}_{M'} \; D^{L}(R)^{M'}_{\;\;M} \quad . \qquad (19)$$

Pour les tenseurs du second ordre la parité intrinsèque ϵ^{j}_{μ} et la parité η^{j}_{μ} sont confondues, et elles se déduisent aisément de celles des harmoniques :

$$\vec{\vec{X}}^{j}_{\mu}(P\vec{u}, \{\vec{e}\}) = \vec{\vec{X}}^{j}_{\mu}(\vec{u}, P\{\vec{e}\}) = \epsilon^{j}_{\mu}\, \vec{\vec{X}}^{j}_{\mu}(\vec{u}, \{\vec{e}\}) = \eta^{j}_{\mu}\, \vec{\vec{X}}^{j}_{\mu}(\vec{u}, \{\vec{e}\}) \qquad (20)$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon^{j}_{\mu} = \eta^{j}_{\mu} &= (-1)^{L+j} \quad \text{pour} \quad \mu = 0 \\ &= (-1)^{L} \quad \text{pour} \quad \mu > 0 \\ &= (-1)^{L+1} \quad \text{pour} \quad \mu < 0 \end{aligned} \qquad (21)$$

Etudions les propriétés géométriques de ces multipoles tensoriels. En utilisant l'équation (3-35) et les propriétés des symboles-6j et des coefficients-CG, on montre que, pour L et M fixés, les neuf multipoles repérés par j et μ sont deux à deux orthogonaux

$$\vec{\vec{X}}^{j}_{\mu}(\vec{u})^{L}_{M} : \vec{\vec{X}}^{j'}_{\mu}(\vec{u})^{L}_{M} = \delta_{jj'} \eta^{j}_{\mu} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \sum_{k} \langle L\mu \,|\, L\mu' k0 \rangle \langle kn \,|\, LMLM \rangle \; Y^{k}_{n}(\vec{u}) \quad . \qquad (22)$$

Le produit contracté des multipoles tensoriels par le vecteur $\vec{u}$

est soit nul soit proportionnel à un multipole vectoriel. En effet, les définitions (1) et (16), la relation (3-40) et les propriétés des symboles-6j permettent d'écrire

$$\vec{\vec{X}}{}^{j}_{o}(\vec{u})^{L}_{M}.\ \vec{u} = -\,\langle j0|1010\rangle\ \vec{X}_{o}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \tag{23a}$$

$$\vec{\vec{X}}{}^{j}_{\pm\mu}(\vec{u})^{L}_{M}.\ \vec{u} = \mp\,(-1)^{j}\langle j\mu|1\mu 10\rangle\ \vec{X}_{\mp}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \quad \mu > 0 \quad . \tag{23b}$$

Ces produits contractés sont nuls pour $\vec{\vec{X}}{}^{1}_{o}$ et pour $\vec{\vec{X}}{}^{2}_{\pm 2}$. A l'aide des formules (9) et (11) on déduit le produit saturé d'un multipole par le vecteur $\vec{u}$,

$$\vec{\vec{X}}{}^{j}_{\mu}(\vec{u})^{L}_{M} : (\vec{u}\otimes\vec{u}) = \delta_{\mu o}\langle j0|1010\rangle\ Y^{L}_{M}(\vec{u}) \ , \tag{24}$$

ce produit est nul sauf pour $\vec{\vec{X}}{}^{o}_{o}$ et $\vec{\vec{X}}{}^{2}_{o}$.

Les multipoles peuvent être obtenus en faisant agir tensoriellement les opérateurs vectoriels $\vec{u}$, $r\vec{\nabla}$ et $\vec{L}$ sur les multipoles vectoriels. En utilisant les identités (3-42,43,44), et les propriétés des symboles-6j, on obtient

$$\begin{aligned}
\vec{\vec{X}}{}^{o}_{o} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\vec{u}\otimes\vec{X}_{o} - \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}}\,(\vec{L}\otimes\vec{X}_{+} - r\vec{\nabla}\otimes\vec{X}_{-})\right\}\\
\vec{\vec{X}}{}^{2}_{o} &= -\sqrt{\frac{2}{3}}\left\{\vec{u}\otimes\vec{X}_{o} + \frac{1}{2\sqrt{L(L+1)}}\,(\vec{L}\otimes\vec{X}_{+} - r\vec{\nabla}\otimes\vec{X}_{-})\right\}\\
\vec{\vec{X}}{}^{1}_{o} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L(L+1)}}\left[(\vec{u} - r\vec{\nabla})\otimes\vec{X}_{+}\right]^{a}\\
\vec{\vec{X}}{}^{2}_{-2} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(L-1)(L+2)}}\left[(\vec{u} + r\vec{\nabla})\otimes\vec{X}_{+}\right]^{s}\\
\vec{\vec{X}}{}^{2}_{+2} &= \frac{1}{\sqrt{2(L-1)(L+2)}}\left[\vec{L}\otimes\vec{X}_{+} + (r\vec{\nabla} + 2\vec{u})\otimes\vec{X}_{-}\right]^{s}\\
\vec{\vec{X}}{}^{2}_{-1} &= -\sqrt{2}\left[\vec{u}\otimes\vec{X}_{+}\right]^{s} \quad , \quad \vec{\vec{X}}{}^{1}_{-1} = \sqrt{2}\left[\vec{u}\otimes\vec{X}_{+}\right]^{a}\\
\vec{\vec{X}}{}^{2}_{+1} &= -\sqrt{2}\left[\vec{u}\otimes\vec{X}_{-}\right]^{s} \quad , \quad \vec{\vec{X}}{}^{1}_{+1} = \sqrt{2}\left[\vec{u}\otimes\vec{X}_{-}\right]^{a}
\end{aligned} \tag{25}$$

où les notations $[\ ]^{s}$ et $[\ ]^{a}$ indiquent que l'on doit prendre la partie symétrique ou antisymétrique du tenseur placé entre les crochets.

L'équation (3-26) et l'identité suivante

$$\left[\vec{u}\otimes\vec{u} + \frac{1}{L(L+1)}\,(\vec{L}\otimes\vec{L} - r\vec{\nabla}\otimes r\vec{\nabla})\right] Y^{L}_{M}(\vec{u}) = \vec{\vec{0}}\ Y^{L}_{M}(\vec{u}) \quad , \tag{26}$$

permettent de démontrer la relation

$$Y^{L}_{M}(\vec{u})\ \vec{u}\otimes\vec{u} = \sum_{j}\langle j0|1010\rangle\ \vec{\vec{X}}{}^{j}_{o}(\vec{u})^{L}_{M} \ . \tag{27}$$

Les équations (12, 13 et 26) permettent de déduire des formules (25) l'expression des multipoles obtenus par action sur les harmoniques scalaires, de l'opérateur identité $\vec{\vec{\delta}}$ ou du produit tensoriel des opérateurs $\vec{u}$, $r\vec{\nabla}$ et $\vec{L}$. Il vient

$$
\begin{aligned}
&\vec{\vec{X}}^{o}_{o} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\vec{\delta}}\,Y \quad , \quad \vec{\vec{X}}^{2}_{o} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\vec{u}\otimes\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{\vec{\delta}}\right) Y \\
&\vec{\vec{X}}^{1}_{o} = \frac{\sqrt{2}}{L(L+1)}\left[\left(\vec{u} - r\vec{\nabla}\right)\otimes\vec{L}\right]^{a} Y \\
&\vec{\vec{X}}^{2}_{-2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(L-1)L(L+1)(L+2)}}\left[\left(\vec{u} + r\vec{\nabla}\right)\otimes\vec{L}\right]^{s} Y \\
&\vec{\vec{X}}^{2}_{+2} = \frac{1}{\sqrt{2(L-1)L(L+1)(L+2)}}\left[\vec{L}\otimes\vec{L} + (r\vec{\nabla} + 2\vec{u})\otimes r\vec{\nabla}\right]^{s} Y \qquad (28) \\
&\vec{\vec{X}}^{2}_{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L(L+1)}}\left[\vec{u}\otimes\vec{L}\right]^{s} Y \quad , \quad \vec{\vec{X}}^{1}_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L(L+1)}}\left[\vec{u}\otimes\vec{L}\right]^{a} Y \\
&\vec{\vec{X}}^{2}_{+1} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L(L+1)}}\left[\vec{u}\otimes r\vec{\nabla}\right]^{s} Y \quad , \quad \vec{\vec{X}}^{1}_{+1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L(L+1)}}\left[\vec{u}\otimes r\vec{\nabla}\right]^{a} Y
\end{aligned}
$$

Les relations (28) permettent de relier nos multipoles tensoriels à ceux définis par d'autres auteurs. Zerilli [Ze.70] considère les multipoles symétriques, $\vec{\vec{a}}_{LM}$, $\vec{\vec{b}}_{LM}$, $\vec{\vec{c}}_{LM}$, $\vec{\vec{d}}_{LM}$, $\vec{\vec{f}}_{LM}$ et $\vec{\vec{h}}_{LM}$ qui s'expriment en fonction des $\vec{\vec{X}}^{j}_{\mu}(\vec{u})^{L}_{M}$ par

$$\vec{\vec{a}}_{LM} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\vec{X}}^{o}_{o}(\vec{u})^{L}_{M} + \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{\vec{X}}^{2}_{o}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \qquad (29a)$$

$$\vec{\vec{b}}_{LM} = -\vec{\vec{X}}^{2}_{+1}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \quad \vec{\vec{c}}_{LM} = -\vec{\vec{X}}^{2}_{-1}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \qquad (29b)$$

$$\vec{\vec{d}}_{LM} = \vec{\vec{X}}^{2}_{-2}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \quad \vec{\vec{f}}_{LM} = \vec{\vec{X}}^{2}_{+2}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \qquad (29c)$$

$$\vec{\vec{h}}_{LM} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\vec{\vec{X}}^{o}_{o}(\vec{u})^{L}_{M} + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\vec{\vec{X}}^{2}_{o}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \qquad (29d)$$

tandis que Regge et Wheeler, [Re.Wh.57] définissent également $\vec{\vec{a}}_{LM}$, $\vec{\vec{b}}_{LM}$, $\vec{\vec{c}}_{LM}$, $\vec{\vec{d}}_{LM}$ et deux autres multipoles $\vec{\vec{e}}_{LM}$ et $\vec{\vec{g}}_{LM}$ qui sont des combinaisons linéaires des $\vec{\vec{f}}_{LM}$ et $\vec{\vec{h}}_{LM}$ de Zerilli,

$$\vec{\vec{e}}_{LM} = \sqrt{\frac{L(L+1)}{2}}\left[\sqrt{(L-1)(L+2)}\,\vec{\vec{f}}_{LM} - \sqrt{L(L+1)}\,\vec{\vec{h}}_{LM}\right] \quad , \qquad (30a)$$

$$\vec{\vec{g}}_{LM} = \sqrt{\frac{L(L+1)}{2}}\left[\sqrt{(L-1)(L+2)}\,\vec{\vec{f}}_{LM} + \sqrt{L(L+1)}\,\vec{\vec{h}}_{LM}\right] \quad . \qquad (30b)$$

L'ensemble $(\vec{\vec{a}}, \vec{\vec{b}}, \vec{\vec{c}}, \vec{\vec{d}}, \vec{\vec{f}}, \vec{\vec{h}})$ forme un système de fonctions orthonormées tandis que $\vec{\vec{e}}$ et $\vec{\vec{g}}$ ne sont pas des fonctions tensorielles orthogonales. Cependant $(\vec{\vec{a}}, \vec{\vec{b}}, \vec{\vec{c}}, \vec{\vec{d}}, \vec{\vec{f}}, \vec{\vec{h}})$ ne forme pas un système de tenseurs orthogonaux comme les $\vec{\vec{X}}$. En outre $\vec{\vec{a}}$, $\vec{\vec{h}}$, $\vec{\vec{e}}$ et $\vec{\vec{g}}$ ne sont pas de trace nulle, alors

que, parmi les $\vec{\vec{X}}$, seul $\vec{\vec{X}}^{o}_{o}$ a une trace non nulle.

Par analogie avec l'électromagnétisme, nous allons donner un nom à chacun de ces multipoles tensoriels en les caractérisant par leur parité et leurs propriétés géométriques. Nous utilisons les notations suivantes:

1o) $\mathcal{M}$ pour les multipoles magnétiques de parité intrinsèque (ou parité) $(-1)^{L}$ et $\mathcal{E}$ pour les multipoles électriques de parité opposée $(-1)^{L+1}$.

2o) a et s respectivement en indice supérieur pour les multipoles antisymétriques (j = 1) et symétriques (j = 0 et 2).

3o) en indice inférieur $\mathcal{S}$ pour le multipole scalaire (proportionnel au tenseur identité $\vec{\vec{\delta}}$) et, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{T}$ pour indiquer un caractère longitudinal ou transverse d'un multipole. Pour ces deux derniers indices, on aura trois possibilités correspondant aux trois configurations géométriques suivantes :

$\vec{\vec{X}}_{\mathcal{TT}}$ pour $\vec{\vec{X}}.\vec{u} = 0$, (31a)

$\vec{\vec{X}}_{\mathcal{LT}}$ pour $\vec{\vec{X}}.\vec{u} \neq 0$ et $\vec{\vec{X}} : (\vec{u} \otimes \vec{u}) = 0$, (31b)

$\vec{\vec{X}}_{\mathcal{LL}}$ pour $\vec{\vec{X}} : (\vec{u} \otimes \vec{u}) \neq 0$ et $\vec{\vec{X}} : \vec{\vec{\delta}} = 0$. (31c)

Avec ces conventions et les relations de parité (20) et (21), nous obtenons la nomenclature suivante :

i) j = 0. On a un seul multipole, de parité $(-1)^{L}$, proportionnel au tenseur identité

$$\boxed{\vec{\vec{\mathcal{M}}}_{\mathcal{S}}\ (\vec{u})^{L}_{M} = \vec{\vec{X}}^{o}_{o}(\vec{u})^{L}_{M} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{\vec{\delta}}\ Y^{L}_{M}(\vec{u})} \qquad (32)$$

ii) j = 1. On a trois multipoles antisymétriques, un électrique et deux magnétiques. Les définitions (1) et (16) et l'identité (3-38) montrent qu'ils sont duaux des multipoles vectoriels, voir tableau (33)

iii) j = 2. On a cinq multipoles symétriques de trace nulle dont deux électriques et trois magnétiques, voir tableau (34)

$$\vec{\vec{\mathcal{M}}}^{a}_{\ell\ell\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = \vec{\vec{X}}^{1}_{+1}(\vec{u})^{L}_{M} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\,\vec{\mathcal{M}}_{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} \wedge$$

$$\vec{\vec{\mathcal{E}}}^{a}_{\ell\ell\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = \vec{\vec{X}}^{1}_{0}(\vec{u})^{L}_{M} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\,\vec{\mathcal{E}}_{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} \wedge \qquad (33)$$

$$\vec{\vec{\mathcal{E}}}^{a}_{\ell\ell\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = \vec{\vec{X}}^{1}_{-1}(\vec{u})^{L}_{M} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\,\vec{\mathcal{E}}_{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} \wedge$$

$$\vec{\vec{\mathcal{M}}}^{s}_{\ell\ell\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = \vec{\vec{X}}^{2}_{+2}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \qquad \vec{\vec{\mathcal{E}}}^{s}_{\ell\ell\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = \vec{\vec{X}}^{2}_{-2}(\vec{u})^{L}_{M}$$

$$\vec{\vec{\mathcal{M}}}^{s}_{\ell\ell\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = \vec{\vec{X}}^{2}_{+1}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \qquad \vec{\vec{\mathcal{E}}}^{s}_{\ell\ell\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = \vec{\vec{X}}^{2}_{-1}(\vec{u})^{L}_{M} \qquad (34)$$

$$\vec{\vec{\mathcal{M}}}^{s}_{\ell\ell\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = \vec{\vec{X}}^{2}_{0}(\vec{u})^{L}_{M} \quad .$$

4.3-Multipoles tensoriels d'ordre quelconque

Les multipoles tensoriels sont des combinaisons linéaires orthonormales des harmoniques sphériques tensorielles de même parité et de mêmes valeurs des j_i. Comme pour les multipoles d'ordre 1 et 2, les scalaires de ces combinaisons sont des coefficients-CG, de sorte que pour L et M fixés, les multipoles soient des tenseurs deux à deux orthogonaux.

Les multipoles d'ordre r, ${}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots j_2}(\vec{u})^{L}_{M}$, ($j_k = 1,2\ldots,k$; $\mu = -j_r,\ldots,+j_r$), sont définis par les relations

$${}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots j_2}_{o}(\vec{u})^{L}_{M} = \sum_{\ell} \langle \ell 0 | j_r 0 L 0\rangle\, {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_{r-1}\cdots j_2}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \qquad (35a)$$

$${}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots j_2}_{\pm\mu}(\vec{u})^{L}_{M} = \sum_{\ell} \frac{1 \pm (-1)^{\ell+L}}{\sqrt{2}} \langle \ell 0 | j_r \mu L -\mu\rangle\, {}^{r}\vec{Y}^{\ell j_{r-1}\cdots j_2}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \ \mu > 0 \qquad (35b)$$

Ce changement de fonctions tensorielles est une transformation orthogonale, aussi les multipoles satisfont-ils la relation d'orthonormalité

$$\int {}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\mu}(\vec{u})^{L}_{M}{}^{*}(r)\ {}^{r}\vec{X}^{j'_r\cdots}_{\mu'}(\vec{u})^{L'}_{M'}\, d\Omega(\vec{u}) = \Big(\prod_{i=2}^{r}\delta_{j_i j'_i}\Big)\delta_{\mu\mu'}\delta_{LL'}\delta_{MM'} \quad . \qquad (36)$$

Par construction, ils se transforment comme les harmoniques dans une rotation

$${}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\mu}(\vec{u},R\{\vec{e}\})^{L}_{M} = {}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\mu}(\vec{u},\{\vec{e}\})^{L'}_{M'}\ D^{L}(R)^{M'}{}_{M} \quad . \qquad (37)$$

La parité intrinsèque $\epsilon^{j_r}_{\mu}$ et la parité $\eta^{j_r}_{\mu}$ sont définies par

$$ {}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\mu}(P\,\vec{u},\{\vec{e}\})^{L}_{M} = \epsilon^{j_r}_{\mu}\ {}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\mu}(\vec{u},\{\vec{e}\})^{L}_{M} \quad , \tag{38} $$

$$ {}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\mu}(\vec{u},P\{\vec{e}\})^{L}_{M} = \eta^{j_r}_{\mu}\ {}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\mu}(\vec{u},\{\vec{e}\})^{L}_{M} \quad . \tag{39} $$

et elles se déduisent très simplement de celles des harmoniques tensorielles, cf.Eq.(3-62,63),

$$ \epsilon^{j_r}_{\mu} = (-1)^{r} \quad \eta^{j_r}_{\mu} = (-1)^{L+j_r} \quad \text{pour } \mu = 0 $$
$$ = (-1)^{L} \quad \text{pour } \mu > 0 \tag{40} $$
$$ = (-1)^{L+1} \quad \text{pour } \mu < 0 $$

Ces multipoles d'ordre r ont des propriétés géométriques semblables à celles des multipoles d'ordre 1 et 2. Pour L et M fixés, ce sont des tenseurs deux à deux orthogonaux.

$$ {}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\mu}(\vec{u})^{L}_{M}(^{r}_{\cdot})\ {}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\mu'}(\vec{u})^{L}_{M} = \Big(\prod_{i=2}^{r}\delta_{j_i\,j_{i'}}\Big)\eta^{j_r}_{\mu}\ \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}\ \sum_{k}\langle L\mu\,|\,L\mu'\,k0\rangle $$
$$ \langle kn\,|\,LMLM\rangle\ Y^{k}_{n}(\vec{u}) \quad . \tag{41} $$

Le produit contracté d'un multipole tensoriel d'ordre r, par le vecteur $\vec{u}$, est soit nul soit proportionnel à un multipole tensoriel d'ordre r-1

$$ {}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{o}(\vec{u})^{L}_{M}\cdot\vec{u} = -\langle j_r\,0\,|\,j_{r-1}\,0\,1\,0\rangle\ {}^{r-1}\vec{X}^{j_{r-1}\cdots}_{o}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \tag{42a} $$

$$ {}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\pm\mu}(\vec{u})^{L}_{M}\cdot\vec{u} = \mp\langle j_r\,-\mu\,|\,j_{r-1}\,\mu\,1\,0\rangle\ {}^{r-1}\vec{X}^{j_{r-1}\cdots}_{\mp\mu}(\vec{u})^{L}_{M}, \quad \mu > 0 \ . \tag{42b} $$

En itérant ces relations on déduit le produit contracté d'un multipole par p fois le vecteur $\vec{u}$, avec $(1 \leqslant p \leqslant r)$. On pose

$$ k_o = \mathrm{Sup}\,\{r - p+1, 2\} \quad , \tag{43} $$

et on a les relations

$$ {}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{o}(^{p}_{\cdot})(\overset{p}{\otimes}\vec{u}) = (-1)^{p}\ \Big(\prod_{k=k_o}^{r}\langle j_k\,0\,|\,j_{k-1}\,0\ 1\,0\rangle\Big)\ {}^{r-p}\vec{X}^{j_{r-p}\cdots}_{o} \tag{44} $$

$\mu > 0$, ${}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\pm\mu}(\overset{p}{\cdot})(\overset{p}{\otimes}\vec{u}) =$

$$\begin{cases} \text{si p est pair :} & (-1)^{p/2}\left(\prod_{k=k_o}^{r}\langle j_k -\mu \,|\, j_{k-1} -\mu\, 10\rangle\right) {}^{r-p}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\pm\mu} \\ \text{si p est impair :} & \mp\,(-1)^{p-1/2}\left(\prod_{k=k_o}^{r}\langle j_k -\mu \,|\, j_{k-1} -\mu\, 10\rangle\right) {}^{r-p}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\mp\mu} \end{cases} \qquad (45)$$

Ces produits sont soit nuls soit proportionnels à un multipole d'ordre r-p. On déduit de la formule précédente la propriété :

$${}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\pm\mu}(\overset{p}{\cdot})(\overset{p}{\otimes}\vec{u}) = 0 \quad \text{si } p > r-\mu \quad . \qquad (46)$$

L'équation (3-51) nous permet d'établir l'identité

$$Y^{L}_{M}(\vec{u})(\overset{r}{\otimes}\vec{u}) = (-1)^{r}\sum_{j_2\cdots j_r}\left(\prod_{k=2}^{r}\langle j_k 0 \,|\, j_{k-1} 010\rangle\right) {}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{o}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \qquad (47)$$

qui généralise les identités (11) et (28) obtenues pour le premier et le second ordre.

Par analogie avec l'électromagnétisme, on appelle magnétiques ($\mathcal{M}$) les multipoles de parité intrinsèque $(-1)^{L}$ et électriques ($\mathcal{E}$) les multipoles de parité opposée. La relation de parité (40) montre que les multipoles magnétiques sont :

$\mathcal{M}$: ${}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{o}$ avec j_r pair et ${}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\mu}$ avec μ positif ,

tandis que les multipoles électriques sont :

$\mathcal{E}$: ${}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{o}$ avec j_r impair et ${}^{r}\vec{X}^{j_r\cdots}_{\mu}$ avec μ négatif .

APPENDICE A : Coefficients de Clebsch-Gordan, Symboles-3j et -6j

Nous rassemblons ici, sans les démontrer, un ensemble de formules bien connues et très utiles sur les coefficients-CG, les symboles-3j et -6j.

A1-Coefficients de Clebsch-Gordan

Les coefficients-CG, notés $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle$, sont nuls si les indices de spin j_i ne satisfont pas les inégalités triangulaires ou si les indices magnétiques ne satisfont pas la condition $m_3 = m_2 + m_1$. Ces coefficients sont réels, i.e.

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle \equiv \langle j_3 m_3 | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle \tag{1}$$

et ils vérifient les relations d'orthogonalité

$$\langle j_3 m_3 | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3' m_3' \rangle = \delta_{j_3 j_3'} \delta_{m_3 m_3'} \tag{2}$$

$$\sum_{j_3} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle \langle j_3 m_3 | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} \tag{3}$$

où l'on utilise la convention de sommation implicite sur les indices magnétiques répétés une fois dans un "ket $|\ \rangle$" et une fois dans un "bra $\langle\ |$", par exemple $|j_3 m_3\rangle\langle j_3 m_3|$.

Les coefficients-CG ont les propriétés de symétrie suivantes

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle = (-1)^{j_3 - j_1 - j_2} \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | j_3 m_3 \rangle \tag{4}$$

$$(-1)^{j_3 - j_1 - j_2} \langle j_1 - m_1 j_2 - m_2 | j_3 - m_3 \rangle \tag{5}$$

$$(-1)^{j_1 - m_1} \sqrt{\frac{2j_3 + 1}{2j_2 + 1}} \langle j_1 m_1 j_3 - m_3 | j_2 - m_2 \rangle \tag{6}$$

$$(-1)^{j_2 + m_2} \sqrt{\frac{2j_3 + 1}{2j_1 + 1}} \langle j_3 - m_3 j_2 m_2 | j_1 - m_1 \rangle \tag{7}$$

Des tables de valeurs analytiques de quelques coefficients-CG sont données dans l'appendice A du livre de Goldberger et Watson [G.W.64].

A2-Symboles-3j

Les symboles-3j sont définis à partir des coefficients-CG par

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1 - j_2 - m_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3 \rangle \qquad (8)$$

Les symboles 3-j ont de meilleures propriétés de symétrie que les coefficients-CG. Ils sont invariants par permutation circulaire des colonnes et tels que

$$\begin{pmatrix} j_1 j_2 & j_3 \\ m_1 m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Wigner a introduit la notion très utile de symbole-3j covariant ou contravariant. Le tenseur métrique qui nous permet d'élever ou d'abaisser les indices magnétiques m_i est défini par

$$C_j^{mm'} = (-1)^{j-m} \delta_{m-m'} \quad , \quad C^j_{mm'} = (-1)^{j+m} \delta_{m-m'} \qquad (10)$$

Le caractère de symétrie de ces tenseurs dépend de la parité de 2j :

$$C_j^{m'm} = (-1)^{2j} C_j^{mm'} \quad , \quad C^j_{m'm} = (-1)^{2j} C^j_{mm'} \; . \qquad (11)$$

Puisque le tenseur n'est pas symétrique, nous devons préciser la place de l'indice de sommation. Nous adopterons la convention d'élever ou d'abaisser un indice en sommant sur le second indice des tenseurs C, cette sommation étant implicite sur l'indice magnétique répété une fois en position covariante et une fois en position contravariante. Par exemple, le symbole-3j une fois contravariant est

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = C_j^{m\,m'} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3' \end{pmatrix} = (-1)^{j_3 - m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Remarquons qu'un symbole-3j est inchangé si on élève les trois indices

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

et que le tenseur métrique peut être représenté par un symbole-3j

$$C^j_{mm'} = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & m' & 0 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Les relations (8) et (12) montrent que les coefficients-CG sont reliés très simplement aux symboles-3j contravariants

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle = (-1)^{2j_1} \sqrt{2j_3+1} \begin{pmatrix} m_1 & j_3 & m_2 \\ j_1 & m_3 & j_2 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

$$\langle j_3 m_3 | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle = (-1)^{2j_2} \sqrt{2j_3+1} \begin{pmatrix} j_1 & m_3 & j_2 \\ m_1 & j_3 & m_2 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

où l'on a établi une correspondance entre les positions des indices magnétiques dans un ket ou un bra pour le coefficient-CG, covariant ou contravariant dans le symbole-3j.

Les relations d'orthogonalité des coefficients-CG s'écrivent avec les symboles-3j sous la forme

$$(2j_3+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m'_3 \\ j_1 & j_2 & j'_3 \end{pmatrix} = \delta_{j_3 j'_3} \delta_{m_3 m'_3} \qquad (17)$$

$$\sum_{j_3} (2j_3+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m'_1 & m'_2 & m'_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \qquad (18)$$

A l'aide des équations (14) et (18), on en déduit la relation

$$\begin{pmatrix} j & j_1 & j_1 \\ m & m_1 & m'_1 \end{pmatrix} C^{m_1 m'_1}_{j_1} = \frac{1}{\sqrt{2j_1+1}} \delta_{jo} \delta_{mo} \qquad (19)$$

La table 2 du livre de Edmonds [Ed.57] donne des valeurs analytiques de symboles-3j.

A3-Symboles-6j

Les symboles-6j sont définis comme le produit saturé de quatre symboles-3j :

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ j_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & m_2 & n_3 \\ n_1 & j_2 & \ell_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & m_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

Ces symboles sont nuls si les nombres j_i et ℓ_k des quatre symboles -3j de la définition ne satisfont pas les inégalités triangulaires. Ils sont invariants pour toute permutation des colonnes, et dans l'opération

$$\begin{Bmatrix} j_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_1 & j_2 & j_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} \qquad (21)$$

En étudiant la réduction du produit tensoriel de trois représentations du groupe des rotations on obtient l'identité

$$(-1)^{2l_2} \sum_{j_3} (2j_3+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ n_1 & n_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & l_2 & l_3 \\ j_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & m_2 & n_3 \\ n_1 & j_2 & l_3 \end{pmatrix} \tag{22}$$

En utilisant l'orthogonalité des symboles-3j on en déduit successivement

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & n_2 & l_3 \\ j_1 & l_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & m_2 & n_3 \\ n_1 & j_2 & l_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & l_2 & m_3 \\ l_1 & n_2 & j_3 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ m_1 & m_2 & m_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & n_2 & l_3 \\ j_1 & l_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & m_2 & n_3 \\ n_1 & j_2 & l_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & l_2 & m_3 \\ l_1 & n_2 & j_3 \end{pmatrix} = \delta_{j_3 j_3'} \delta_{m_3 m_3'} \frac{1}{2j_3+1} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix} \tag{24}$$

Lorsque l'un des indices est nul, le symbole-6j prend une valeur particulièrement simple

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{j_1+j_2+j_3}}{\sqrt{(2j_2+1)(2j_3+1)}} \delta_{j_2 l_3} \delta_{j_3 l_2} \tag{25}$$

La table 5 du livre de Edmonds [Ed.57] donne des valeurs analytiques de symboles-6j.

APPENDICE B : Action des opérateurs $\vec{u}$, $r\vec{\nabla}$ et $\vec{L}$ sur les harmoniques sphériques et les multipoles vectoriels

Cet appendice est consacré à la démonstration de quelques identités de la section 3 concernant l'action des opérateurs vectoriels $\vec{u}$, $r\vec{\nabla}$ et $\vec{L}$ sur les harmoniques scalaires ou vectorielles, et les multipoles vectoriels.

B1-Action de l'opérateur $\vec{u}$ sur les harmoniques sphériques

Pour calculer les expressions $\vec{u}Y_M^L(\vec{u})$, $\vec{u} \wedge \vec{Y}^\ell(\vec{u})_M^L$ et $\vec{u} \otimes \vec{Y}^\ell(\vec{u})_M^L$ apparaissant dans les équations (3-13,12,42), nous utilisons la relation préliminaire suivante

$$u_n^* \, Y_M^L(\vec{u}) = - \sum_\ell \langle \ell 0 | 10 L 0 \rangle \langle \ell m 1 n | LM \rangle \, Y_m^\ell(\vec{u}) \quad , \tag{1}$$

qui se déduit des Eq.(2-30,36).

Alors, nous avons

$$\vec{u} \, Y_M^L(\vec{u}) = \sum_n u_n^* \, Y_M^L(\vec{u}) \, \vec{e}_n \quad , \tag{2a}$$

$$= - \sum_\ell \langle \ell 0 | 10 L 0 \rangle \langle \ell m 1 n | LM \rangle \, Y_m^\ell(\vec{u}) \, \vec{e}_n \quad , \tag{2b}$$

soit, d'après la définition (3.1) des harmoniques vectorielles

$$\boxed{\vec{u} \, Y_M^L(\vec{u}) = - \sum_\ell \langle \ell 0 | 10 L 0 \rangle \vec{Y}^\ell(\vec{u})_M^L} \tag{3}$$

Nous pouvons écrire $\vec{u} \wedge \vec{Y}^\ell(\vec{u})_M^L$ sous la forme

$$\vec{u} \wedge \vec{Y}^\ell(\vec{u})_M^L = \sum_{n'} \langle \ell m 1 n | LM \rangle \, u_{n'}^* \, Y_m^\ell \, \vec{e}_{n'} \wedge \vec{e}_n \quad , \tag{4a}$$

$$= -i\sqrt{2} \langle \ell m 1 n | LM \rangle \sum_k \langle k 0 | 10 \ell 0 \rangle \langle k \mu 1 n' | \ell m \rangle \, Y_\mu^k \langle 1 r | 1 n' 1 n \rangle \, \vec{e}_n \quad , \tag{4b}$$

où nous avons utilisé les équations (1) et (2-11). A l'aide des relations (A-15,16,23) nous pouvons exprimer le produit de coefficients-CG en fonction d'un symbole-6j et d'un coefficient-CG

$$\langle \ell m 1 n | LM \rangle \langle k \mu 1 n' | \ell m \rangle \langle 1 r | 1 n' 1 n \rangle$$

$$= (-1)^{L+k} \sqrt{3(2\ell+1)} \begin{Bmatrix} L & k & 1 \\ 1 & 1 & \ell \end{Bmatrix} \langle k \mu 1 r | LM \rangle \quad . \tag{5}$$

Ce coefficient-CG permet de reconstruire une harmonique vectorielle, et la relation (4b) devient

$$\vec{u} \wedge \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = i\sqrt{6(2\ell+1)} \sum_{k} (-1)^{L+k+1} \langle k0|10\ell0\rangle \begin{Bmatrix} L & k & 1 \\ 1 & 1 & \ell \end{Bmatrix} \vec{Y}^{k}(\vec{u})^{L}_{M} \qquad (6)$$

En utilisant à nouveau les relations (A-15,16,13) nous pouvons transformer le produit d'un symbole-6j par un coefficient-CG,

$$(-1)^{L+k+1}\sqrt{6(2\ell+1)}\langle k0|10\ell0\rangle \begin{Bmatrix} L & k & 1 \\ 1 & 1 & \ell \end{Bmatrix} =$$

$$= \sqrt{2} \sum_{n} \langle \ell 0|1nL-n\rangle\langle k0|1nL-n\rangle\langle 1n|1n10\rangle \qquad (7a)$$

$$= \left[1-(-1)^{\ell+k}\right]\langle \ell 0|11L-1\rangle\langle k0|11L-1\rangle \qquad (7b)$$

où pour obtenir la dernière expression nous avons effectué la sommation sur n et calculé numériquement le dernier coefficient-CG. Finalement, nous obtenons

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = i\langle \ell 0|11L-1\rangle \sum_{k} \left[1-(-1)^{\ell+k}\right]\langle k0|11L-1\rangle \vec{Y}^{k}(\vec{u})^{L}_{M}} \qquad (8)$$

Le produit tensoriel $\vec{u} \otimes \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M}$ s'écrit

$$\vec{u} \otimes \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = \sum_{n'} \langle \ell m1n|LM\rangle\, u^{*}_{n'}\, Y^{\ell}_{m}\, \vec{e}_{n'} \otimes \vec{e}_{n} \quad , \qquad (9a)$$

$$= \langle \ell m1n|LM\rangle \sum_{jk} \langle k0|10\ell0\rangle\langle k\mu 1n'|\ell m\rangle\, Y^{k}_{\mu}\langle j\nu|1n'1n\rangle\, \vec{t}^{\,j}_{\nu} \quad , \qquad (9b)$$

où nous avons utilisé l'équation (1) et la relation inverse de (3-17). En transformant le produit de coefficients-CG de la même manière qu'en (5) et en reconstruisant l'harmonique tensorielle, on obtient

$$\boxed{\vec{u} \otimes \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^{L}_{M} = (-1)^{L+\ell} \sum_{jk} \langle k0|10\ell0\rangle \sqrt{(2j+1)(2\ell+1)} \begin{Bmatrix} L & k & j \\ 1 & 1 & \ell \end{Bmatrix} \vec{Y}^{kj}(\vec{u})^{L}_{M}} \qquad (10)$$

B2-Action de l'opérateur $\vec{L}$ sur les harmoniques sphériques

Les harmoniques sphériques étant fonctions propres de $\vec{L}^2$ et de L_z satisfont les relations

$$\vec{L}^2\, Y^{L}_{M} = L(L+1)\, Y^{L}_{M} \quad , \qquad (11)$$

$$L_n\, Y^{L}_{M} = \sqrt{L(L+1)}\, Y^{L}_{m}\langle Lm|LM1n\rangle \quad , \qquad (12a)$$

$$L^{\dagger}_{n}\, Y^{L}_{M} = \sqrt{L(L+1)}\, Y^{L}_{m}\langle Lm1n|LM\rangle \quad , \qquad (12b)$$

où les opérateurs $\vec{L}_n = \vec{L}.\vec{e}_n$ et $L^{\dagger}_{n} = \vec{L}.\vec{e}_n = (-1)^n L_{-n}$ sont les

composantes sphériques de l'opérateur $\vec{L}$.

Nous avons donc

$$\vec{L}\ Y_M^L = \sum_n L_n^+\ Y_M^L\ \vec{e}_n = \sqrt{L(L+1)}\ \langle Lm1n|LM\rangle\ Y_M^L\ \vec{e}_n \quad . \tag{13}$$

soit en fonction d'une harmonique vectorielle

$$\vec{L}\ Y_M^L(\vec{u}) = \sqrt{L(L+1)}\ \vec{Y}^L(\vec{u})_M^L \tag{14}$$

Calculons l'expression $\vec{L} \otimes \vec{Y}^\ell(\vec{u})_M^L$. Nous avons

$$\vec{L} \otimes \vec{Y}^\ell(\vec{u})_M^L = \sum_n \langle \ell m1n'|LM\rangle\ L_n^+\ Y_m^\ell\ \vec{e}_n \otimes \vec{e}_{n'} \tag{15a}$$

$$= \sum_j \sqrt{\ell(\ell+1)}\ \langle \ell m1n'|LM\rangle\ Y_\mu^\ell\ \langle \ell\mu 1n|\mu m\rangle\ \langle j\nu|1n1n'\rangle\ \vec{\vec{t}}_\nu^{\,j} \tag{15b}$$

où nous avons utilisé l'équation (12b) et la relation inverse de (3-17). De la même manière que précédemment, en transformant le produit de coefficients-CG et en reconstruisant l'harmonique tensorielle on obtient

$$\boxed{\vec{L} \otimes \vec{Y}^\ell(\vec{u})_M^L = (-1)^{L+\ell} \sum_j \sqrt{\ell(\ell+1)(2\ell+1)(2j+1)} \begin{Bmatrix} L & \ell & j \\ 1 & 1 & \ell \end{Bmatrix} \vec{\vec{Y}}^{\ell j}(\vec{u})_M^L} \tag{16}$$

A l'aide de l'identité

$$\frac{1 + (-1)^{\ell+k}}{\sqrt{2}}\ \langle k0|11\ell{-}1\rangle = \delta_{k\ell} \tag{17}$$

nous pouvons écrire les équations (14) et (16) sous les formes données en (3-15) et (3-44).

B3-Action de l'opérateur $r\vec{\nabla}$ sur les harmoniques sphériques

Pour calculer les expressions $r\vec{\nabla}\ Y_M^L(\vec{u})$, $r\vec{\nabla}.\vec{Y}^\ell(\vec{u})_M^L$ et $r\vec{\nabla}\otimes\vec{Y}^\ell(\vec{u})_M^L$, nous pouvons utiliser les calculs précédents grâce à l'identité suivante entre les opérateurs,

$$r\vec{\nabla} = \vec{u}\ (\vec{u}.r\vec{\nabla}) - i\ \vec{u} \wedge \vec{L} \quad , \tag{18}$$

qui implique

$$r\vec{\nabla}\ Y_M^L = -\ i\ \vec{u} \wedge \vec{L}\ Y_M^L \quad , \tag{19}$$

puisque $\vec{u}.r\vec{\nabla} = r\frac{\partial}{\partial r}$ et que les harmoniques ne dépendent pas de r.

Les équations (14) et (8) conduisent à

$$r\vec{\nabla}\ Y_M^L = -\ i\sqrt{L(L+1)}\ \vec{u} \wedge \vec{Y}^L(\vec{u})_M^L \quad , \tag{20a}$$

$$= \sqrt{L(L+1)}\ \langle L0|11L{-}1\rangle \sum_\ell \left[1 - (-1)^{L+\ell}\right] \langle \ell 0|11L{-}1\rangle\ \vec{Y}^\ell(\vec{u})_M^L \quad . \tag{20b}$$

En remarquant que $\langle L0|11L-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient

$$r\,\vec{\nabla} Y^L_M = \sqrt{L(L+1)} \sum_{\ell} \frac{1-(-1)^{L+\ell}}{\sqrt{2}} \langle \ell 0|11L-1\rangle \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^L_M \qquad (21)$$

Cette dernière identité nous permet de déterminer la divergence des harmoniques sphériques vectorielles

$$r\,\vec{\nabla}.\vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^L_M = \langle \ell m1n|LM\rangle\, (r\,\vec{\nabla}\, Y^{\ell}_m).\vec{e}_n \quad , \qquad (22a)$$

$$= \langle \ell m1n|LM\rangle \sqrt{\ell(\ell+1)} \sum_{k} \frac{1-(-1)^{\ell+k}}{\sqrt{2}} \langle k0|11\ell-1\rangle \vec{Y}^{k}(\vec{u})^{\ell}_m . \vec{e}_n \quad , \qquad (22b)$$

$$= \langle \ell m1n|LM\rangle \sqrt{\ell(\ell+1)} \sum_{k} \frac{1-(-1)^{\ell+k}}{\sqrt{2}} \langle k0|11\ell-1\rangle\langle k\mu 1n'|\ell m\rangle \vec{e}_{n'} . \vec{e}_n\, Y^k_{\mu} \qquad (22c)$$

En utilisant l'orthogonalité des vecteurs de base et des coefficients-CG, la sommation sur k disparait et on obtient

$$r\,\vec{\nabla}.\vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^L_M = \frac{(-1)^{L+\ell}-1}{\sqrt{2}} \sqrt{\ell(\ell+1)}\, \langle \ell 1|11L0\rangle\, Y^L_M(\vec{u}) \qquad (23)$$

A l'aide de l'équation (21) et de la relation inverse de (3-17), nous pouvons écrire $r\,\vec{\nabla} \otimes \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^L_M$ sous la forme

$$r\,\vec{\nabla} \otimes \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^L_M = \langle \ell m1n|LM\rangle\, (r\,\vec{\nabla}\, Y^{\ell}_m) \otimes \vec{e}_n \qquad (24a)$$

$$= \langle \ell m1n|LM\rangle \sqrt{\ell(\ell+1)} \sum_{k} \frac{1-(-1)^{\ell+k}}{\sqrt{2}} \langle k0|11\ell-1\rangle\langle k\mu 1n'|\ell m\rangle \vec{e}_{n'} \otimes \vec{e}_n\, Y^k_{\mu} \qquad (24b)$$

$$= \sum_{jk} \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{1-(-1)^{\ell+k}}{\sqrt{2}} \langle k0|11\ell-1\rangle\langle \ell m1n|LM\rangle\langle k\mu 1n'|\ell m\rangle \langle j\nu|1n'1n\rangle\, Y^k_{\mu} \Rightarrow^j_{t\nu} \qquad (24c)$$

Finalement en transformant le produit des 3 derniers coefficients-CG et en reconstruisant l'harmonique tensorielle, on obtient

$$r\,\vec{\nabla} \otimes \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^L_M = (-1)^{L+\ell} \sqrt{\ell(\ell+1)} \sum_{jk} \frac{(-1)^{\ell+k}-1}{\sqrt{2}} \langle k0|11\ell-1\rangle \sqrt{(2j+1)(2\ell+1)} \begin{Bmatrix} L & k & j \\ 1 & 1 & \ell \end{Bmatrix} \Rightarrow^{kj}(\vec{u})^L_M \qquad (25)$$

B4-Action de l'opérateur $\vec{L}^2$ sur les harmoniques et les multipoles vectoriels

Les harmoniques sphériques vectorielles sont des fonctions propres de l'opérateur $\vec{L}^2$, en effet

$$\vec{L}^2\ \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^L_M = \langle \ell m 1 n | LM \rangle\ \vec{L}^2\ Y^{\ell}_m\ \vec{e}_n \qquad (26a)$$

$$= \ell(\ell+1)\ \langle \ell m 1 n | LM \rangle\ Y^{\ell}_m\ \vec{e}_n \qquad (26b)$$

soit

$$\boxed{\vec{L}^2 \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^L_M = \ell(\ell+1)\ \vec{Y}^{\ell}(\vec{u})^L_M} \qquad (27)$$

Le multipole vectoriel $\vec{X}_+(\vec{u})^L_M$, identique à $\vec{Y}^L(\vec{u})^L_M$, est donc aussi fonction propre de $\vec{L}^2$,

$$\boxed{\vec{L}^2\ \vec{X}_+(\vec{u})^L_M = L(L+1)\ \vec{X}_+(\vec{u})^L_M} \qquad (28)$$

Mais il n'en est pas de même pour les deux autres multipoles vectoriels $\vec{X}_o(\vec{u})^L_M$ et $\vec{X}_-(\vec{u})^L_M$ qui sont des combinaisons linéaires des harmoniques $\vec{Y}^{L+1}(\vec{u})^L_M$ et $\vec{Y}^{L-1}(\vec{u})^L_M$, cf.Eq.(4-2), on a

$$\vec{L}^2 \vec{X}_o(\vec{u})^L_M = \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}}\ \vec{L}^2\ \vec{Y}^{L+1}(\vec{u})^L_M - \sqrt{\frac{L}{2L+1}}\ \vec{L}^2\ \vec{Y}^{L-1}(\vec{u})^L_M\ , \qquad (29a)$$

$$= \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}}\ (L+1)(L+2)\ \vec{Y}^{L+1}(\vec{u})^L_M - \sqrt{\frac{L}{2L+1}}\ L(L-1)\ \vec{Y}^{L-1}(\vec{u})^L_M \qquad (29b)$$

En exprimant les harmoniques en fonctions des multipoles, il vient

$$\boxed{\vec{L}^2\ \vec{X}_o(\vec{u})^L_M = \left[L(L+1)+2\right]\ \vec{X}_o(\vec{u})^L_M + 2\sqrt{L(L+1)}\ \vec{X}_-(\vec{u})^L_M} \qquad (30)$$

De manière analogue, on obtient

$$\boxed{\vec{L}^2\ \vec{X}_-(\vec{u})^L_M = L(L+1)\ \vec{X}_-(\vec{u})^L_M + 2\sqrt{L(L+1)}\ \vec{X}_o(\vec{u})^L_M} \qquad (31)$$

B5-Formule du gradient-Action de l'opérateur $r\vec{\nabla}$ sur les multipoles vectoriels

Les multipoles vectoriels peuvent être construits par action des opérateurs vectoriels sur les harmoniques scalaires, voir Eq.(4-11,12,13),

$$\vec{X}_o(\vec{u})^L_M = -\vec{u}\ Y^L_M(\vec{u}) \qquad (32)$$

$$\vec{X}_+(\vec{u})^L_M = \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}}\ \vec{L}\ Y^L_M(\vec{u}) \qquad (33)$$

$$\vec{X}_-(\vec{u})^L_M = \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}}\ r\vec{\nabla}\ Y^L_M(\vec{u}) \qquad (34)$$

Les multipoles permettent d'écrire la formule du gradient sous une forme très simple. En effet, nous avons

$$r\,\vec{\nabla}\,f(r)\,Y_M^L(\vec{u}) = f(r)\,r\,\vec{\nabla}\,Y_M^L + Y_M^L(\vec{u})\,r\,\vec{\nabla}\,f(r) \quad , \tag{35}$$

soit, en utilisant l'identité,

$$r\,\vec{\nabla}\,f(r) = r\,f'(r)\,\vec{u} \quad , \tag{36}$$

et les équations (32) et (34)

$$\boxed{r\,\vec{\nabla}\,f(r)\,Y_M^L(\vec{u}) = \sqrt{L(L+1)}\,f(r)\,\vec{X}_-(\vec{u})_M^L - r\,f'(r)\,\vec{X}_o(\vec{u})_M^L} \tag{37}$$

Calculons la divergence de ces multipoles. Pour $\vec{X}_o(\vec{u})_M^L$, nous avons

$$r\,\vec{\nabla}.\vec{X}_o(\vec{u})_M^L = -r\,\vec{\nabla}.(\vec{u}\,Y_M^L) = -\,Y_M^L\,r\,\vec{\nabla}.\vec{u} - \vec{u}.r\,\vec{\nabla}\,Y_M^L \; . \tag{38}$$

Le dernier terme de cette équation est nul car les multipoles sont des vecteurs perpendiculaires. La divergence du vecteur $\vec{u}$ est

$$r\,\vec{\nabla}.\vec{u} = r\,\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \vec{\nabla}.\vec{r} + r\,\vec{r}.\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = 2 \; , \tag{39}$$

il en résulte

$$\boxed{r\,\vec{\nabla}.\vec{X}_o(\vec{u})_M^L = -2\,Y_M^L(\vec{u})} \tag{40}$$

La divergence du produit de $\vec{X}_o(\vec{u})_M^L$ par une fonction radiale f(r) est

$$r\,\vec{\nabla}.f(r)\,\vec{X}_o(\vec{u})_M^L = r[\vec{\nabla}f(r)].\vec{X}_o(\vec{u})_M^L + f(r)\,r\,\vec{\nabla}.\vec{X}_o(\vec{u})_M^L \tag{41}$$

soit en utilisant les équations (32),(36) et (40)

$$\boxed{r\,\vec{\nabla}.f(r)\,\vec{X}_o(\vec{u})_M^L = -\left[2f(r) + r\,f'(r)\right]Y_M^L(\vec{u})} \tag{42}$$

La divergence du multipole $\vec{X}_+(\vec{u})_M^L$ est ,

$$r\,\vec{\nabla}.\vec{X}_+(\vec{u})_M^L = \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}}\,r\,\vec{\nabla}.\vec{L}Y_M^L(\vec{u}) = \frac{-ir}{\sqrt{L(L+1)}}\,(\vec{\nabla},\vec{r},\vec{\nabla})\,Y_M^L(\vec{u}) \tag{43}$$

Le produit mixte d'opérateurs $(\vec{\nabla},\vec{r},\vec{\nabla})$ étant nul, on a

$$\boxed{r\,\vec{\nabla}.\vec{X}_+(\vec{u})_M^L = 0} \tag{44}$$

Ce résultat peut être obtenu par l'équation (23) puisque $\vec{X}_+(\vec{u})_M^L$ est identique à $\vec{Y}^L(\vec{u})_M^L$. La divergence du produit de $\vec{X}_+(\vec{u})_M^L$ par une fonction radiale est aussi nulle, en effet

$$r\,\vec{\nabla}.f(r)\,\vec{X}_+(\vec{u})_M^L = r\,(\vec{\nabla}f(r)).\vec{X}_+(\vec{u})_M^L + f(r)\,r\,\vec{\nabla}.\vec{X}_+(\vec{u})_M^L \tag{45}$$

et les deux termes de cette expression sont nuls

$$\boxed{r\,\vec{\nabla}.f(r)\,\vec{X}_+(\vec{u})_M^L = 0} \tag{46}$$

La divergence de $\vec{X}_-(\vec{u})^L_M$ est

$$r\vec{\nabla}.\vec{X}_-(\vec{u})^L_M = \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}}\, r\vec{\nabla}.(r\vec{\nabla}Y^L_M) \quad , \tag{47a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}}\left[r(\vec{\nabla}r).\vec{\nabla}Y^L_M + r^2\vec{\nabla}^2\, Y^L_M\right] \tag{47b}$$

Le premier terme de cette expression est nul, et en utilisant l'identité

$$r^2\,\vec{\nabla}^2 = r^2(\vec{u}.\vec{\nabla})^2 + 2r\,(\vec{u}.\vec{\nabla}) - \vec{L}^2 \tag{48}$$

on obtient

$$\boxed{r\vec{\nabla}.\vec{X}_-(\vec{u})^L_M = -\sqrt{L(L+1)}\; Y^L_M(\vec{u})} \tag{49}$$

La divergence du produit de $\vec{X}_-(\vec{u})^L_M$ par une fonction radiale est

$$r\vec{\nabla}.f(r)\vec{X}_-(\vec{u})^L_M = r\vec{\nabla}[f(r)].\vec{X}_-(\vec{u})^L_M + f(r)\; r\vec{\nabla}.\vec{X}_-(\vec{u})^L_M \tag{50}$$

soit, le premier terme étant nul

$$\boxed{r\vec{\nabla}.f(r)\vec{X}_-(\vec{u})^L_M = -\sqrt{L(L+1)}\; f(r)\; Y^L_M(\vec{u})} \tag{51}$$

Calculons les rotationnels des multipoles. L'identité

$$ir\vec{\nabla}\wedge\vec{L} = \vec{u}\,(r^2\,\vec{\nabla}^2) - (\vec{u}.r\vec{\nabla})\; r\vec{\nabla} - r\vec{\nabla} \tag{52}$$

nous donne directement le rotationnel de $\vec{X}_+(\vec{u})^L_M$

$$\boxed{ir\vec{\nabla}\wedge\vec{X}_+(\vec{u})^L_M = \sqrt{L(L+1)}\;\vec{X}_o(\vec{u})^L_M - \vec{X}_-(\vec{u})^L_M} \tag{53}$$

Le rotationnel du produit de $\vec{X}_+(\vec{u})^L_M$ par une fonction radiale est alors

$$\boxed{ir\vec{\nabla}\wedge f(r)\vec{X}_+(\vec{u})^L_M = \sqrt{L(L+1)}\; f(r)\vec{X}_o(\vec{u})^L_M - [f(r)+rf'(r)]\vec{X}_-(\vec{u})^L_M} \tag{54}$$

De même des identités

$$ir\vec{\nabla}\wedge\vec{u} = -ir\,\vec{\nabla}\wedge r\,\vec{\nabla} = \vec{L} \tag{55}$$

on déduit les rotationnels de $\vec{X}_o(\vec{u})^L_M$ et $\vec{X}_-(\vec{u})^L_M$

$$\boxed{ir\vec{\nabla}\wedge\vec{X}_o(\vec{u})^L_M = -\sqrt{L(L+1)}\;\vec{X}_+(\vec{u})^L_M} \tag{56}$$

$$\boxed{ir\vec{\nabla}\wedge\vec{X}_-(\vec{u})^L_M = -\vec{X}_+(\vec{u})^L_M} \tag{57}$$

et l'on en tire

$$\boxed{ir\vec{\nabla}\wedge f(r)\vec{X}_o(\vec{u})^L_M = -\sqrt{L(L+1)}\; f(r)\;\vec{X}_+(\vec{u})^L_M} \tag{58}$$

$$\boxed{ir\vec{\nabla}\wedge f(r)\vec{X}_-(\vec{u})^L_M = -[f(r)+rf'(r)]\;\vec{X}_+(\vec{u})^L_M} \tag{59}$$

Plusieurs identités de cet appendice sont utilisées dans l'appendice C.

APPENDICE C : Application des multipoles vectoriels à l'électromagnétisme

Dans cet appendice, après quelques rappels d'électromagnétisme, nous utilisons les multipoles comme base pour la résolution de l'équation d'Helmholtz au lieu des harmoniques vectorielles comme le fait Rose, [Ros.55].

C1-Equation d'Helmholtz

En régime sinusoïdal de nombre d'onde k, soient $\vec{A}(\vec{r})$ et $\vec{\varphi}(\vec{r})$ les potentiels vectoriel et scalaire indépendants du temps. Si on leur impose la condition de Lorentz

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = ik\varphi \quad , \tag{1}$$

ils satisfont des équations de propagation découplées. Dans le vide, ce sont les équations d'Helmholtz

$$\vec{\nabla}^2 A + k^2 A = 0 \quad , \tag{2a}$$

$$\vec{\nabla}^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad , \tag{2b}$$

Ces potentiels peuvent être décomposés en séries de potentiels multipolaires $\vec{A}^L_M(\vec{r})$, $\varphi^L_M(\vec{r})$ se transformant dans une rotation selon une représentation d'ordre L

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} \vec{A}^L_M(\vec{r}) \tag{3a}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} \varphi^L_M(\vec{r}) \tag{3b}$$

L'identité (B-48) permet de montrer que l'équation d'Helmholtz scalaire (2b) admet pour solutions particulières

$$\varphi^L_M(\vec{r}) = f^L(kr)\ Y^L_M(\vec{u}) \quad , \tag{4}$$

où la fonction f^L est solution de l'équation différentielle

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx} + \left[1 - \frac{L(L+1)}{x^2} \right] \right\} f^L(x) = 0 \quad , \tag{5}$$

avec

$$x = kr \quad . \tag{6}$$

C2-Invariance de jauge.Champ électromagnétique longitudinal

Les champs électriques $\vec{E}$ et magnétique $\vec{H}$ se déduisent des potentiels par les relations bien connues

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad , \tag{7}$$

$$\vec{E} = ik\vec{A} - \vec{\nabla}\varphi \quad . \tag{8}$$

ces champs sont inchangés si on effectue sur les potentiels une transformation de jauge

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\,\Psi \tag{9a}$$

$$\varphi' = \varphi + ik\,\Psi \tag{9b}$$

Pour que les potentiels transformés vérifient les équations d'Helmholtz, il est nécessaire et suffisant qu'ils satisfassent la condition de Lorentz (1). Ceci impose à la fonction de jauge Ψ d'être solution de l'équation d'Helmholtz scalaire

$$\vec{\nabla}^2\,\Psi + k^2\,\Psi = 0 \tag{10}$$

Des potentiels tels que

$$\vec{A}(\ell) = \vec{\nabla}\,\Psi \tag{11a}$$

$$\varphi(\ell) = ik\,\Psi \tag{11b}$$

conduisent à des champs électrique et magnétique identiquement nuls. Le champ électromagnétique correspondant est appelé longitudinal.

A la fonction de jauge particulière

$$\Psi_M^L(\vec{r}) = \frac{1}{k}\, f^L(kr)\, Y_M^L(\vec{u}) \tag{12}$$

sont associés les potentiels multipolaires longitudinaux

$$\boxed{\varphi_M^L(\ell) = i\, f^L(kr)\, Y_M^L(\vec{u})} \tag{13a}$$

$$\boxed{\vec{A}_M^L(\ell) = \sqrt{L(L+1)}\,\frac{f^L(kr)}{kr}\,\vec{X}_-(\vec{u})_M^L - f^L(kr)'\,\vec{X}_o(\vec{u})_M^L} \tag{13b}$$

où pour obtenir l'équation (13b) , on a utilisé la formule du gradient (B-37).

C3-Jauge solénoïde. Potentiels magnétique et électrique

Dans le vide, il est possible de choisir la fonction de jauge de manière que le potentiel scalaire transformé soit nul

$$\Psi = \frac{i}{k}\varphi \quad , \quad \varphi' = 0 \quad . \tag{14}$$

Dans ce cas, le potentiel vecteur transformé

$$\vec{A}' = \vec{A} + \frac{i}{k}\vec{\nabla}\varphi \tag{15}$$

a une divergence nulle

$$\vec{\nabla}.\vec{A}' = 0 \tag{16}$$

et il est appelé potentiel de radiation. La condition (16) définit la jauge solénoïde.

Dans la jauge solénoïde les potentiels multipolaires de parité intrinsèque $(-1)^L$ ou $(-1)^{L+1}$ sont respectivement appelés magnétiques ou électriques

$$\vec{A}^{L}_{M}(\vec{r},m) = (-1)^{L}\,\vec{A}^{L}_{M}(-\vec{r},m) \quad , \tag{17a}$$
$$\vec{A}^{L}_{M}(\vec{r},e) = (-1)^{L+1}\,\vec{A}^{L}_{M}(-\vec{r},e) \quad .$$

Les multipoles vectoriels forment une base de vecteurs orthogonaux à L et M fixés. En tenant compte de la parité des multipoles, cf.Eq.(4-5,7), on peut décomposer les potentiels multipolaires magnétiques et électriques sous la forme

$$\vec{A}^{L}_{M}(m) = f(r)\,\vec{X}_{+}(\vec{u})^{L}_{M} \quad , \tag{18a}$$

$$\vec{A}^{L}_{M}(e) = g(r)\,\vec{X}_{o}(\vec{u})^{L}_{M} + h(r)\,\vec{X}_{+}(\vec{u})^{L}_{M} \quad . \tag{18b}$$

Les fonctions radiales f, g, h ne sont pas arbitraires, car les potentiels doivent satisfaire la condition de jauge (16) et l'équation d'Helmholtz vectorielle (2a).

L'équation (B-46) montre que la condition de jauge n'impose aucune contrainte sur la fonction f, mais les équations (B-48) et (B-28) montrent que l'équation d'Helmholtz (2a) impose à la fonction f d'être solution de l'équation différentielle (5), d'où

$$\boxed{\vec{A}^{L}_{M}(m) = f^{L}(kr)\,\vec{X}_{+}(\vec{u})^{L}_{M}} \tag{19}$$

En utilisant les identités (B-42) et (B-51), on montre que la condition de jauge impose aux fonctions g et h la relation

$$h = -\frac{1}{\sqrt{L(L+1)}}\left[2g + rg'\right] \tag{20}$$

et à l'aide des identités (B-48,30,31) on montre que l'équation d'Helmholtz implique que la fonction g soit de la forme

$$g(r) = \frac{f^L(kr)}{kr} \tag{21}$$

où $f^L(kr)$ est solution de l'équation différentielle (5). Le potentiel multipolaire électrique peut donc s'écrire

$$\boxed{\vec{A}^L_M(e) = \frac{f^L(kr)}{kr}\,\vec{X}_o(\vec{u})^L_M - \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}}\left[\frac{f^L(kr)}{kr} + f^L(kr)'\right]\vec{X}_-(\vec{u})^L_M} \tag{22}$$

Le premier terme de cette expression est proportionnel à $\vec{u}$, longitudinal, et le second orthogonal, transverse. C'est pourquoi nous appelons le multipole $\vec{X}_o(\vec{u})^L_M$, "électrique longitudinal" et $\vec{X}_-(\vec{u})^L_M$, "électrique transverse". De même le multipole $\vec{X}_+(\vec{u})^L_M$ orthogonal à $\vec{u}$ est appelé "magnétique transverse", cf.Eq.(4-14).

C4-Champs et potentiels multipolaires duaux

Si on considère les équations de Maxwell dans le vide, on voit que si $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont des solutions, alors $\vec{E}_d$ et $\vec{H}_d$ définis par

$$\vec{E}_d = \pm \vec{H} \quad , \quad \vec{H}_d = \mp \vec{E} \tag{23}$$

sont aussi solutions.

Les champs $\vec{E}_d$, $\vec{H}_d$ sont appelés les champs duaux de $\vec{E}$, $\vec{H}$. Comme les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont de parités opposées, un champ et son dual sont aussi de parités opposées.

Soient $\vec{E}^L_M(m)$ et $\vec{H}^L_M(m)$ les champs produits par un potentiel multipolaire magnétique $\vec{A}^L_M(m)$. Les champs duaux ont des parités opposées à celles de $\vec{E}^L_M(m)$ et $\vec{H}^L_M(m)$, ils sont donc produits par un potentiel multipolaire électrique, $\vec{A}^L_{dM}(e)$, appelé potentiel multipolaire dual de $\vec{A}^L_M(m)$. Les champs $\vec{E}^L_{dM}(e)$ et $\vec{H}^L_{dM}(e)$ duaux de $\vec{E}^L_M(m)$ et $\vec{H}^L_M(m)$ sont donc

$$\vec{E}^L_{dM}(e) = \pm \vec{H}^L_M(m) = \pm \vec{\nabla} \wedge \vec{A}^L_M(m) = ik\,\vec{A}^L_{dM}(e) \quad , \tag{24a}$$

$$\vec{H}^L_{dM}(e) = \mp \vec{E}^L_M(m) = \mp ik\,\vec{A}^L_M(m) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}^L_{dM}(e) \tag{24b}$$

On en déduit les relations entre les potentiels multipolaires duaux

$$\vec{A}^{L}_{dM}(e) = \pm \frac{1}{ik} \vec{\nabla} \wedge \vec{A}^{L}_{M}(m) \qquad (25a)$$

$$\vec{A}^{L}_{M}(m) = \mp \frac{1}{ik} \vec{\nabla} \wedge \vec{A}^{L}_{dM}(e) \qquad (25b)$$

En prenant le potentiel multipolaire magnétique sous la forme (19), à l'aide de l'identité (B-54), on peut écrire le potentiel multipolaire dual

$$\vec{A}^{L}_{dM}(e) = \mp \left\{ \sqrt{L(L+1)}\, \frac{f^{L}(kr)}{kr} \vec{X}_{o}(\vec{u})^{L}_{M} - \left[\frac{f^{L}(kr)}{kr} + f^{L}(kr) \right] \vec{X}_{-}(\vec{u})^{L}_{M} \right\} \qquad (26)$$

Au facteur $\mp \sqrt{L(L+1)}$ près, cette expression est identique à (22). Les champs électriques et magnétiques correspondants sont

$$\vec{E}^{L}_{M}(m) = \mp \vec{H}^{L}_{dM}(e) = ikf^{L}(kr) \vec{X}_{+}(\vec{u})^{L}_{M} \qquad (27a)$$

$$\vec{H}^{L}_{M}(m) = \pm \vec{E}^{L}_{dM}(e) = -ik \left\{ \sqrt{L(L+1)}\, \frac{f^{L}(kr)}{kr} \vec{X}_{o}(\vec{u})^{L}_{M} - \left[\frac{f^{L}(kr)}{kr} + f^{L}(kr)' \right] \vec{X}_{-}(\vec{u})^{L}_{M} \right\} \qquad (27b)$$

CHAPITRE DEUXIEME

HARMONIQUES SPHERIQUES TENSORIELLES

ET MULTIPOLES TENSORIELS SUR M

5 - RAPPELS SUR L'ESPACE DE MINKOWSKI ET LE GROUPE DE LORENTZ

Cette section est consacrée à des résultats sur la géométrie de l'espace de Minkowski, M, et le groupe de Lorentz. Nous y rappelons les propriétés des tétrades sphériques, des transformations de Lorentz pures et de leurs représentations, ainsi que la décomposition canonique d'une transformation de Lorentz quelconque.

5.1-Espace de Minkowski-Tétrade sphérique

Nous utilisons le tenseur métrique $\underline{\underline{g}}$, dont les composantes sont : $g_{oo} = - g_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, 3)$, $g_{\mu\nu} = 0$ pour $\mu \neq \nu$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$, et $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$. Le tenseur de Lévi-Civita à quatre indices est le tenseur complètement antisymétrique $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ tel que $\epsilon_{o123} = 1$.

Une tétrade $\{e\}$ est un ensemble de 4 quadrivecteurs $\underline{e}_\alpha$,$(\alpha=0,1,2,3)$, formant une base de l'espace de Minkowski, et satisfaisant les relations d'orthogonalité, d'orientation et de fermeture suivantes :

$$\underline{e}_\alpha \cdot \underline{e}_\beta = g_{\alpha\beta} \quad , \tag{1}$$

$$\{\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta, \underline{e}_\gamma, \underline{e}_\delta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad , \tag{2}$$

$$g^{\alpha\beta}\, \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta = \underline{\underline{g}} \quad , \tag{3}$$

où le symbole $\{\ ,\ ,\ ,\}$ représente le déterminant de 4 quadrivecteurs et où nous utilisons la convention de sommation sur les indices répétés. Par la suite nous omettrons l'indice du vecteur unitaire de genre temps,i.e. nous écrirons $\underline{e}$ pour $\underline{e}_o$.

La base sphérique associée à la tétrade $\{e\}$ est l'ensemble des quatre quadrivecteurs $\underline{e}^j_n$ $(j = 0,\ n = 0\ ;\ j = 1,\ n = -,0,+)$ définis par

$$\underline{e}^o_o = \underline{e} \quad , \quad \underline{e}^1_o = \underline{e}_3 \quad , \tag{4a}$$

$$\underline{e}^1_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \ (\underline{e}_1 \pm i\, \underline{e}_2) \quad . \tag{4b}$$

Ces quadrivecteurs appartiennent au complexifié de l'espace de Minkowski et satisfont les identités

$$\underline{e}^{j\,*}_{n} = (-1)^{n}\ \underline{e}^{j}_{-n} \quad , \tag{5}$$

$$\underline{e}^{j\,*}_{n}.\underline{e}^{j'}_{n'} = (-1)^{j}\ \delta_{jj'}\ \delta_{nn'} \quad , \tag{6}$$

ainsi que les relations suivantes, (équivalentes à (1), (2),(3))

$$\underline{e}^{j}_{n}\ .\ \underline{e}^{j'}_{n'} = \delta_{jj'}\ C^{j}_{nn'} \quad , \tag{7}$$

$$\{\underline{e},\ \underline{e}^{1}_{m},\ \underline{e}^{1}_{n},\ \underline{e}^{1}_{r}\} = -i\ \epsilon_{mnr} \quad , \tag{8}$$

$$\sum_{j=0}^{1} C^{nn'}_{j}\ \underline{e}^{j}_{n} \otimes \underline{e}^{j}_{n'} = \sum_{j=0}^{1} (-1)^{j}\ \underline{e}^{j\,*}_{n} \otimes \underline{e}^{j}_{n'} = \underline{\underline{g}} \quad , \tag{9}$$

où nous utilisons le tenseur métrique sphérique

$$C^{j}_{nn'} = (-1)^{2j}\ C^{nn'}_{j} = (-1)^{j+n}\ \delta_{n-n'} \quad , \tag{10}$$

et le tenseur de Lévi-Civita sphérique ϵ_{mnr} défini en (2-11).

Les composantes sphériques a^{j}_{n} d'un quadrivecteur $\underline{a}$, sur la tétrade $\{e\}$, sont définies par

$$a^{j}_{n} = (-1)^{j}\ \underline{a}\ .\ \underline{e}^{j}_{n} \quad , \tag{11}$$

ou de façon équivalente, d'après les propriétés des tétrades sphériques, par

$$\underline{a} = \sum_{j=0}^{1}\ \sum_{n=-j}^{+j}\ a^{j}_{n}\ \underline{e}^{j\,*}_{n} \quad . \tag{12}$$

Le produit scalaire de deux quadrivecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$ s'écrit en fonction des composantes sphériques

$$\underline{a}.\underline{b} = \sum_{j=0}^{1} C^{nn'}_{j}\ a^{j}_{n}\ b^{j}_{n'} = a^{o}_{o}b^{o}_{o} + a^{1}_{+}b^{1}_{-} - a^{1}_{o}b^{1}_{o} + a^{1}_{-}b^{1}_{+} \quad . \tag{13}$$

Dans le référentiel où les composantes d'espace du quadrivecteur $\underline{e}$ sont nulles, la composante de temps des quadrivecteurs $\underline{e}^{1}_{n}$ est aussi nulle et ces derniers se réduisent aux vecteurs de base sphérique définis en (2-5)

$$\underline{e} = (1,\ \vec{0}) \quad ,\quad \underline{e}^{1}_{n} = (0,\ \vec{e}_{n}) \quad . \tag{14}$$

5.2-Groupe de Lorentz [Wig.60]

Les transformations Λ du groupe de Lorentz $\mathcal{L}$ sont des opérateurs linéaires sur l'espace de Minkowski M, qui conservent le produit scalaire i.e.,

$$\forall\ \underline{a},\underline{b} \in M \ ,\quad \Lambda\,\underline{a}\cdot\Lambda\underline{b} = \underline{a}\cdot\underline{b} \ . \tag{15}$$

Cette condition peut aussi s'écrire sous la forme

$$\forall\ \underline{a},\underline{b} \in M \ ,\quad \Lambda\underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{a}\cdot\Lambda^{-1}\underline{b} \tag{16}$$

Le groupe de Lorentz $\mathcal{L}$ peut se découper en quatre nappes disjointes

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \cup \mathcal{L}^{\uparrow}_{-} \cup \mathcal{L}^{\downarrow}_{+} \cup \mathcal{L}^{\downarrow}_{-} \ , \tag{17}$$

définies par les relations suivantes, où $\{e\}$ est une tétrade quelconque,

$$\Lambda \in \mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \Leftrightarrow \underline{e}_o\cdot\Lambda\underline{e}_o > 0 \quad \text{et} \quad \{\Lambda\underline{e}_\alpha,\ \Lambda\underline{e}_\beta,\ \Lambda\underline{e}_\gamma,\ \Lambda\underline{e}_\delta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \ , \tag{18a}$$

$$\Lambda \in \mathcal{L}^{\uparrow}_{-} \Leftrightarrow \underline{e}_o\cdot\Lambda\underline{e}_o > 0 \quad \text{et} \quad \{\Lambda\underline{e}_\alpha,\ \Lambda\underline{e}_\beta,\ \Lambda\underline{e}_\gamma,\ \Lambda\underline{e}_\delta\} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \ , \tag{18b}$$

$$\Lambda \in \mathcal{L}^{\downarrow}_{+} \Leftrightarrow \underline{e}_o\cdot\Lambda\underline{e}_o < 0 \quad \text{et} \quad \{\Lambda\underline{e}_\alpha,\ \Lambda\underline{e}_\beta,\ \Lambda\underline{e}_\gamma,\ \Lambda\underline{e}_\delta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \ , \tag{18c}$$

$$\Lambda \in \mathcal{L}^{\downarrow}_{-} \Leftrightarrow \underline{e}_o\cdot\Lambda\underline{e}_o < 0 \quad \text{et} \quad \{\Lambda\underline{e}_\alpha,\ \Lambda\underline{e}_\beta,\ \Lambda\underline{e}_\gamma,\ \Lambda\underline{e}_\delta\} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \ . \tag{18d}$$

Parmi ces nappes, seule $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$, qui contient l'opérateur identité, forme un sous-groupe appelé groupe de Lorentz restreint.

La nappe $\mathcal{L}^{\uparrow}_{-}$ contient l'opérateur parité P, défini dans la tétrade $\{e\}$ par

$$P = 2\ \underline{e} \otimes \underline{e}\cdot - \underline{\underline{g}}\cdot \ , \tag{19}$$

et dont l'action sur les quadrivecteurs de base sphérique est

$$P\ \underline{e}^{j}_{n} = (-1)^{j}\ \underline{e}^{j}_{n} \ . \tag{20}$$

La nappe $\mathcal{L}^{\downarrow}_{+}$ contient l'opérateur renversement du temps T, défini dans la tétrade $\{e\}$ par

$$T = -P = \underline{\underline{g}}\cdot - 2\ \underline{e} \otimes \underline{e}\cdot \ , \tag{21}$$

et dont l'action sur les quadrivecteurs de base sphérique est

$$T\ \underline{e}^{j}_{n} = -(-1)^{j}\ \underline{e}^{j}_{n} \ . \tag{22}$$

Enfin la nappe $\mathcal{L}^{\downarrow}_{-}$ contient le produit des opérateurs P et T qui est égal à

$$P\ T = -\ \underline{\underline{g}}\cdot \tag{23}$$

5.3-Petit groupe d'un quadrivecteur. Rotation

On appelle petit groupe d'un quadrivecteur l'ensemble des transformations de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ qui laissent ce quadrivecteur invariant. Dans la suite nous ne nous intéresserons qu'au petit groupe de quadrivecteurs de genre temps qui est isomorphe au groupe des rotations à trois dimensions.

En effet, à toute transformation R du petit groupe d'un quadrivecteur $\underline{e}$ ($\underline{e}^2 = 1$), on associe une rotation $\tilde{R}$ de l'espace à trois dimensions orthogonal au quadrivecteur $\underline{e}$ par

$$\tilde{R} = -\sum_{m,n} (\underline{e}^1_m{}^* . R\underline{e}^1_n) \quad \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n^* \quad . \tag{24}$$

où les trivecteurs $\vec{e}_m$ sont définis par l'équation (14). On peut donc représenter, dans la tétrade $\{e\}$, une rotation R du petit groupe de $\underline{e}$, par la matrice qui représente, dans la base vectorielle $\{\vec{e}\}$, la rotation $\tilde{R}$ associée,

$$D^j(R,\{e\})^m{}_n = D^j(\tilde{R},\{\vec{e}\})^m{}_n \quad . \tag{25}$$

A l'aide de (2-17,7b), les éléments de matrice des représentations $D^j(R)$ pour j = 0 et 1, s'expriment à l'aide des quadrivecteurs de la base sphérique, sous la forme

$$D^j(R)^m{}_n = (-1)^j \, \underline{e}^j_m{}^* . R\underline{e}^j_n \quad . \tag{26}$$

On déduit de l'équation (26) et de la relation de fermeture (9) la loi de transformation par rotation du petit groupe de $\underline{e}$, des quadrivecteurs $\underline{e}^j_m$ de la tétrade sphérique

$$R\underline{e}^j_m = \underline{e}^j_{m'} \, D^j(R)^{m'}{}_m \quad . \tag{27}$$

Si on conjugue une rotation R_e du petit groupe de $\underline{e}$ par une transformation de Lorentz quelconque Λ, on obtient une rotation du petit groupe de $\Lambda\underline{e}$, $R_{\Lambda e}$,

$$R_{\Lambda e} = \Lambda \, R_e \Lambda^{-1} \quad , \tag{28}$$

dont les représentations dans la tétrade $\Lambda\{e\}$ sont identiques à celles de R_e dans la tétrade $\{e\}$

$$D^j(R_{\Lambda e}, \Lambda\{e\}) = D^j(R_e,\{e\}) \quad . \tag{29}$$

5.4-Transformation de Lorentz pure

Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ deux quadrivecteurs unitaires de genre temps ($a^2 = b^2 = 1$) tels que leur produit scalaire soit positif ($\underline{a}.\underline{b} > 0$). Une transformation de Lorentz $L\ (b \leftarrow a)$ qui transforme $\underline{a}$ en $\underline{b}$ et laisse invariant le 2-plan orthogonal aux quadrivecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$, cest-à-dire,

$$L\ (b \leftarrow a)\ \underline{a} = \underline{b} \quad , \tag{30a}$$

$$L\ (b \leftarrow a)\ \underline{c} = \underline{c} \quad \text{si } \underline{c}.\underline{a} = \underline{c}.\underline{b} = 0 \quad , \tag{30b}$$

est appelée transformation de Lorentz pure. Une telle transformation s'exprime en fonction des quadrivecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sous la forme

$$L\ (b \leftarrow a) = \underline{g}\ .- \frac{(\underline{b}+\underline{a}) \otimes (\underline{b}+\underline{a}).}{\underline{b}.\underline{a} + 1} + 2\ \underline{b} \otimes \underline{a}. \quad . \tag{31}$$

Inverser une transformation de Lorentz pure revient à inverser l'ordre de ses arguments

$$L^{-1}(b \leftarrow a) = L\ (a \leftarrow b) \quad . \tag{32}$$

Le produit de deux transformations pures n'est pas, en général une transformation de Lorentz pure, mais toutes les transformations pures du même 2-plan, $(\underline{a},\underline{b})$ forment un groupe dont la loi de produit est

$$L\ (c \leftarrow b)\ L\ (b \leftarrow a) = L\ (c \leftarrow a) \text{ si } \underline{c} \in (\underline{a},\underline{b}) \quad . \tag{33}$$

Enfin, si l'on conjugue une transformation pure par une transformation Λ quelconque, on obtient une nouvelle transformation pure.

$$L\ (\Lambda b \leftarrow \Lambda a) = \Lambda\ L\ (b \leftarrow a)\ \Lambda^{-1} \quad . \tag{34}$$

Considérons deux quadrivecteurs $\underline{e}$ et $\underline{x}$ reliés par la transformation de Lorentz pure $L\ (\underline{x} \leftarrow \underline{e})$. Si on connait un quadrivecteur $\underline{u}$ unitaire, de genre espace, orthogonal à $\underline{e}$ ($\underline{u}^2 = -1$, $\underline{u}.\underline{e} = 0$) et appartenant au 2-plan $(\underline{e},\underline{x})$, il forme avec $\underline{e}$ une base orthogonale de ce 2-plan, et on peut écrire le quadrivecteur $\underline{x}$ et la transformation $L\ (\underline{x} \leftarrow \underline{e})$ sous la forme

$$\underline{x} = (\underline{x}.\underline{e})\ \underline{e} - (\underline{x}.\underline{u})\ \underline{u} \tag{35a}$$

$$L\ (\underline{x} \leftarrow \underline{e}) = \underline{g}\ .+(\underline{x}.\underline{e}-1)(\underline{e} \otimes \underline{e}.- \underline{u} \otimes \underline{u}.)-\underline{x}.\underline{u}(\underline{e} \otimes \underline{u}\ .- \underline{u} \otimes \underline{e}.) \tag{35b}$$

En paramétrant cette transformation par l'argument χ tel que

$$\text{ch}\,\chi = \underline{x}.\underline{e} \quad , \qquad \text{sh}\,\chi = \underline{x}.\underline{u} \quad , \tag{36}$$

on définit la transformation pure $L(\chi)$ du 2-plan $(\underline{e},\underline{u})$ par

$$L(\chi) = \underline{\underline{g}}. + (\text{ch}\,\chi - 1)(\underline{e} \otimes \underline{e}. - \underline{u} \otimes \underline{u}.) - \text{sh}\,\chi\,(\underline{e} \otimes \underline{u}. - \underline{u} \otimes \underline{e}.). \tag{37}$$

L'action de la transformation $L(\chi)$ est explicitée par les relations

$$L(\chi)\,\underline{e} = \text{ch}\,\chi\,\underline{e} + \text{sh}\,\chi\,\underline{u} \quad , \tag{38a}$$

$$L(\chi)\,\underline{u} = \text{sh}\,\chi\,\underline{e} + \text{ch}\,\chi\,\underline{u} \quad , \tag{38b}$$

$$L(\chi)\,\underline{y} = \underline{y} \quad \text{si} \quad \underline{e}.\underline{y} = \underline{u}.\underline{y} = 0. \tag{38c}$$

5.5-Représentation des transformations de Lorentz pures

Considérons une transformation de Lorentz pure $L(\chi)$ du plan $(\underline{e},\underline{u})$ définie par la relation (37) et deux quadrivecteurs $\underline{v}$ et $\underline{w}$, unitaires de genre espace formant avec $\underline{e}$ et $\underline{u}$ une tétrade. La relation de fermeture de la tétrade, Eq.(3), permet de décomposer $L(\chi)$ en une différence de deux opérateurs,

$$L(\chi) = \left[\text{ch}\,\chi\,(\underline{e} \otimes \underline{e}. - \underline{u} \otimes \underline{u}.) - \text{sh}\,\chi\,(\underline{e} \otimes \underline{u}. - \underline{u} \otimes \underline{e}.)\right] - \left[\underline{v} \otimes \underline{v}. + \underline{w} \otimes \underline{w}.\right], \tag{39}$$

le premier agissant dans le 2-plan $(\underline{e},\underline{u})$, le second étant l'opérateur identité agissant dans le 2-plan orthogonal à $(\underline{e},\underline{u})$. Dans la base $(\underline{e},\underline{u})$ le premier opérateur est représenté par la matrice 2×2 symétrique, $B(\chi)$,

$$B(\chi) = \begin{pmatrix} \text{ch}\,\chi & \text{sh}\,\chi \\ \text{sh}\,\chi & \text{ch}\,\chi \end{pmatrix} \quad , \tag{40}$$

tandis que le second est représenté par la matrice identité dans n'importe quelle base du 2-plan orthogonal à $(\underline{e},\underline{u})$.

$$I = B(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{41}$$

Nous avons vu, cf. équation (33), que les transformations pures dans un 2-plan forment un groupe, il en est de même des matrices B de représentation. La loi de produit de leur groupe est

$$B(\chi_1)\,B(\chi_2) = B(\chi_1 + \chi_2) \quad , \tag{42}$$

tandis que l'inverse d'une matrice B est telle que

$$B(\chi)^{-1} = B(-\chi) \quad . \tag{43}$$

Les éléments des matrices $B(\chi)$, notés $B(\chi)^i{}_j$, (où les indices i et j prennent les valeurs 0 et 1) sont définis analytiquement par

$$B(\chi)^i{}_j = \tfrac{1}{2}\left[e^{+\chi} + (-1)^{i+j}\, e^{-\chi}\right] , \qquad (44)$$

et ils satisfont l'identité

$$B(\chi)^i{}_j = (-1)^{i+j}\, B(-\chi)^i{}_j \quad . \qquad (45)$$

Si l'on pose

$$\underline{e} = \underline{e}^0 \quad , \quad \underline{u} = \underline{e}^1 \quad , \qquad (46)$$

la loi de transformation par $L(\chi)$ de ces quadrivecteurs s'écrit sous la forme

$$L(\chi)\ \underline{e}^j = B(\chi)^j{}_i\ \underline{e}^i \quad , \qquad (47)$$

avec j = 0 ou 1, et sommation sur i = 0 et 1.

Les propriétés des fonctions trigonométriques hyperboliques, permettent de réduire le produit tensoriel de deux matrices B en une somme directe de matrices B. Soit m et n deux entiers positifs avec $m \geqslant n$, on a

$$B(m\chi) \otimes B(n\chi) = B\left[(m+n)\chi\right] + B\left[(m-n)\chi\right] , \qquad (48)$$

et la relation explicite entre les éléments de ces matrices est

$$B(m\chi)^i{}_j\ B(n\chi)^k{}_\ell = \tfrac{1}{2}\{B\left[(m+n)\chi\right]^{i+k}{}_{j+\ell} + (-1)^{k+\ell} B\left[(m-n)\chi\right]^{i+k}{}_{j+\ell}\} , \qquad (49)$$

où la somme des indices matriciels est définie modulo 2.

Un tenseur d'ordre r se transforme selon $\overset{r}{\otimes} L(\chi)$. Cela nous amène à considérer le produit tensoriel de matrices $\overset{r}{\otimes} (B(\chi) + I)$. Ce produit tensoriel peut être réduit à l'aide de (48), et on obtient,

$$\overset{r}{\otimes} (B(\chi) + I) = \bigoplus_{r=0}^{r} \alpha_r(n) \bigoplus B(n\chi) \quad , \qquad (50)$$

où $\alpha_r(n)$ est la multiplicité de la représentation $B(n\chi)$,

$$\alpha_r(n) = (\tfrac{1}{2})^{\delta_{n0}}\, C^{2r}_{r-n} = (\tfrac{1}{2})^{\delta_{n0}}\ \frac{(2r)!}{(r-n)!\,(r+n)!} \qquad (51)$$

L'équation (50) signifie que le produit tensoriel de r fois l'espace de Minkowski peut être décomposé en une somme directe de 2^{2r-1} sous-espaces à 2 dimensions, invariants par $L(\chi)$, et on vérifie que

$$\sum_{n=0}^{r} \alpha_r(n) = 2^{2r-1} \quad . \qquad (52)$$

Parmi les sous-espaces globalement invariants, ceux qui se transforment suivant la représentation $B(0\chi) = I$, sont localement invariants. Donc le nombre de tenseurs invariants dans la transformation $L(\chi)$ est

$$2\,\alpha_r(0) = C_r^{2r} = \frac{(2r)!}{(r!)^2} \quad . \tag{53}$$

Nous utiliserons ces propriétés pour définir la notion de multipoles tensoriels irréductibles au §7.4.

Par exemple, considérons les quatre tenseurs d'ordre 2, $\underline{\underline{t}}^{ij}$, formés par les produits tensoriels des quadrivecteurs $\underline{e}^i$ et $\underline{e}^j$ (i, j = 0, 1)

$$\underline{\underline{t}}^{ij} = \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j \tag{54}$$

et étudions leurs propriétés de transformation par $L(\chi)$, en utilisant la loi (40) de transformation des quadrivecteurs $\underline{e}^i$,

$$(L(\chi) \otimes L(\chi))\underline{\underline{t}}^{ij} = (L(\chi)\underline{e}^i) \otimes (L(\chi)\underline{e}^j) = \sum_{k,\ell} B(\chi)^i{}_k\, B(\chi)^j{}_\ell\, \underline{\underline{t}}^{k\ell} \quad . \tag{55}$$

Le produit tensoriel $B(\chi) \otimes B(\chi)$ se réduit en la somme directe $B(2\chi) \oplus I$, cf.Eq.(41), et en utilisant la formule (42), on obtient

$$(L(\chi) \otimes L(\chi))\underline{\underline{t}}^{ij} = \tfrac{1}{2} \sum_{k,\ell} \{B(2\chi)^{i+j}{}_{k+\ell} + (-1)^{j+\ell}\, \delta^{i+j}{}_{k+\ell}\}\, \underline{\underline{t}}^{k\ell} \quad . \tag{56}$$

Les tenseurs $\underline{\underline{t}}^{ij}$ ne sont donc pas irréductibles par $L(\chi)$, mais la relation précédente permet d'en déduire des combinaisons linéaires qui sont irréductibles

$$(L(\chi) \otimes L(\chi))(\underline{\underline{t}}^{ij} + \underline{\underline{t}}^{\bar{i}\bar{j}}) = \sum_k B(2\chi)^j{}_k (\underline{\underline{t}}^{ik} + \underline{\underline{t}}^{\bar{i}\bar{k}}) \quad , \tag{57}$$

$$(L(\chi) \otimes L(\chi))(\underline{\underline{t}}^{ij} - \underline{\underline{t}}^{\bar{i}\bar{j}}) = \underline{\underline{t}}^{ij} - \underline{\underline{t}}^{\bar{i}\bar{j}} \quad , \tag{58}$$

où l'on utilise les notations $\bar{i} = 0,1$ si $i = 1,0$.

En explicitant les éléments de la matrice $B(2\chi)$ et les tenseurs $\underline{\underline{t}}$ en fonction des quadrivecteurs $\underline{e}$ et $\underline{u}$ on obtient

$$L(\chi) \otimes L(\chi)(\underline{e} \otimes \underline{e} + \underline{u} \otimes \underline{u}) = \operatorname{ch} 2\chi(\underline{e} \otimes \underline{e} + \underline{u} \otimes \underline{u}) + \operatorname{sh} 2\chi(\underline{e} \otimes \underline{u} + \underline{u} \otimes \underline{e}), \tag{59a}$$

$$L(\chi) \otimes L(\chi)(\underline{e} \otimes \underline{u} + \underline{u} \otimes \underline{e}) = \operatorname{sh} 2\chi(\underline{e} \otimes \underline{e} + \underline{u} \otimes \underline{u}) + \operatorname{ch} 2\chi(\underline{e} \otimes \underline{u} + \underline{u} \otimes \underline{e}), \tag{59b}$$

$$L(\chi) \otimes L(\chi)(\underline{e} \otimes \underline{e} - \underline{u} \otimes \underline{u}) = \underline{e} \otimes \underline{e} - \underline{u} \otimes \underline{u} \tag{60a}$$

$$L(\chi) \otimes L(\chi)(\underline{e} \otimes \underline{u} - \underline{u} \otimes \underline{e}) = \underline{e} \otimes \underline{u} - \underline{u} \otimes \underline{e} \tag{60b}$$

Ces relations nous seront utiles pour définir les multipoles tensoriels irréductibles d'ordre 2.

5.6-Décomposition canonique d'une transformation de Lorentz

Etant donné un quadrivecteur de genre temps, toute transformation de Lorentz peut se décomposer de façon unique en un produit d'une transformation de Lorentz pure et d'une rotation du petit groupe de ce quadrivecteur.

Soit $\underline{e}$ un quadrivecteur unitaire de genre temps et Λ une transformation quelconque de $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$. La décomposition canonique de Λ est

$$\Lambda = L_{\Lambda} R_{\Lambda} \quad , \tag{61}$$

où L_{Λ} est la transformation de Lorentz pure $L(\Lambda e \leftarrow e)$

$$L_{\Lambda} = L(\Lambda e \leftarrow e) = \underline{g}. - \frac{(\Lambda \underline{e}+\underline{e}) \otimes (\Lambda \underline{e}.+ \underline{e}.)}{\underline{e}.\Lambda \underline{e} +1} + 2\Lambda \underline{e} \otimes \underline{e}. \quad , \tag{62}$$

et où R_{Λ} est la rotation du petit groupe de $\underline{e}$ définie par

$$R_{\Lambda} = L^{-1}(\Lambda e \leftarrow e)\Lambda = \Lambda - \frac{(\Lambda \underline{e}+\underline{e}) \otimes (\underline{e}.+\Lambda^{-1} \underline{e}.)}{\underline{e}.\Lambda \underline{e} +1} + 2\, \underline{e} \otimes \underline{e}. \quad . \tag{63}$$

Des expressions précédentes, on déduit les identités

$$R_{\Lambda^{-1}} = (R_{\Lambda})^{-1} \quad , \tag{64}$$

$$L_{\Lambda^{-1}} = \Lambda^{-1} (L_{\Lambda})^{-1} \Lambda \quad . \tag{65}$$

La décomposition canonique permet d'écrire la loi de transformation des quadrivecteurs de base sphérique sous la forme

$$\Lambda \underline{e}^{j}_{n} = L_{\Lambda} \underline{e}^{j}_{n'} D^{j}(R_{\Lambda})^{n'}{}_{n} \quad . \tag{66}$$

6 - HARMONIQUES SPHERIQUES TENSORIELLES SUR M

Dans cette section, nous généralisons la notion d'harmoniques sphériques tensorielles à l'espace de Minkowski, M. Nous construisons d'abord les bases tensorielles sphériques, qui nous permettent de définir les harmoniques sphériques scalaires puis tensorielles, d'un quadrivecteur. Elles forment une base de l'espace des fonctions tensorielles sur M et se transforment suivant une représentation irréductible dans une rotation du petit groupe du quadrivecteur de genre temps de la tétrade dans laquelle elles sont définies.

6.1-Base tensorielle sphérique

Considérons le produit tensoriel de r fois l'espace de Minkowski par lui-même ($\overset{r}{\otimes}$ M). On peut construire une base de cet espace en faisant le produit tensoriel des quadrivecteurs de la tétrade sphérique $\underline{e}^{j_1}_{n_1} \otimes \underline{e}^{j_2}_{n_2} \otimes \underline{e}^{j_r}_{n_r}$, mais dans une rotation R_e, du petit groupe de $\underline{e}$, ces tenseurs se transforment selon le produit tensoriel de représentations $D^{j_1}(R_e) \otimes D^{j_2}(R_e) \otimes \ldots \otimes D^{j_r}(R_e)$. Les tenseurs de base sphérique, qui se transforment suivant une représentation irréductible, sont construits, en réduisant à l'aide des coefficients-CG, ces produits tensoriels des quadrivecteurs de base.

Les tenseurs $\underline{t}$ d'ordre 1 et $\underline{\underline{t}}$ d'ordre 2 sont définis par

$$\underline{t}^{j_1}_{m} = \underline{e}^{j_1}_{m} \quad , \tag{1}$$

$$\underline{\underline{t}}^{\ell_2 j_1 j_2}_{m} = \langle j_1 m' j n | \ell_2 m \rangle \; \underline{e}^{j_1}_{m'} \otimes e^{j}_{n} \tag{2}$$

Les tenseurs $\underset{r}{\underline{t}}$ d'ordre r sont construits par itération à partir des tenseurs $\underset{r-1}{\underline{t}}$ d'ordre r-1 et des quadrivecteurs $\underline{e}^{j_r}_{n_r}$

$$\underset{r}{\underline{t}}^{\ell_r \ldots \ell_2 j_1 \ldots j_r}_{m} = \langle \ell_{r-1} m' j_r n | \ell_r m \rangle \; \underset{r-1}{\underline{t}}^{\ell_{r-1} \ldots \ell_2 j_1 \ldots j_{r-1}}_{m'} \otimes \underline{e}^{j_r}_{n} \quad . \tag{3}$$

Par la suite quand il n'y aura pas d'ambiguité nous adopterons l'abréviation $\underset{r}{\underline{t}}^{\ell_r j_r}_{m}$ au lieu de $\underset{r}{\underline{t}}^{\ell_r \ldots \ell_2 j_1 \ldots j_r}_{m}$.

Considérons quelques propriétés de ces tenseurs. Ils satisfont l'identité

$$\underset{r}{\underline{t}}^{\ell_r j_r *}_{m} = (-1)^{j+\ell_r+m} \; \underset{r}{\underline{t}}^{\ell_r j_r}_{-m} \quad , \tag{4}$$

où nous avons défini le paramètre j par

$$\boxed{j = j_1 + j_2 + \ldots + j_r} \quad , \tag{5}$$

et les relations d'orthonormalité

$$\underset{r}{\underline{t}}^{\ell_r j_r}_{m}(\overset{r}{\cdot}) \; \underset{r}{\underline{t}}^{\ell'_r j'_r}_{m'} = \Big(\prod_{i=2}^{r} \delta_{\ell_i \ell'_i}\Big)\Big(\prod_{k=1}^{r} \delta_{j_k j'_k}\Big) \, C^{\ell_r}_{mm'} \quad , \tag{6}$$

$$\underset{r}{\underline{t}}^{\ell_r j_r *}_{m}(\overset{r}{\cdot}) \; \underset{r}{\underline{t}}^{\ell'_r j'_r}_{m'} = (-1)^{j}\Big(\prod_{i=2}^{r} \delta_{\ell_i \ell'_i}\Big)\Big(\prod_{k=1}^{r} \delta_{j_k j'_k}\Big) \, \delta_{mm'} \quad . \tag{7}$$

Soit Λ une transformation de Lorentz quelconque. Les tenseurs

$\underset{r}{t}'^{\ell_r\, j_r}_{m'}$ construits dans la tétrade $\Lambda\{e\}$ sont reliés aux précédents par la relation suivante qui généralise l'équation (5-66).

$$\underset{r}{t}'^{\ell_r\, j_r}_{m'} = (\overset{r}{\otimes} L_\Lambda)\ \underset{r}{t}^{\ell_r\, j_r}_{m'}\ \ D^{\ell_r}(R_\Lambda)^{m}_{\ m'} \qquad (8)$$

où la transformation de Lorentz pure L_Λ et la rotation R_Λ sont définies par les équations (5-62 et 63).

L'action de l'opérateur parité P sur les tenseurs de la base sphérique est, cf.Eq.(5-19,20),

$$(\overset{r}{\otimes} P)\ \underset{r}{t}^{\ell_r\, j_r}_{m} = (-1)^{j}\ \underset{r}{t}^{\ell_r\, j_r}_{m} \quad . \qquad (9)$$

Les composantes sphériques $A^{\ell_r\, j_r}_{m}$ d'un tenseur quelconque $\underset{r}{A}$ sur les tenseurs de base sphérique sont définies par

$$\underset{r}{A} = \sum_{\ell_2 \cdots \ell_r}\ \sum_{m}\ \sum_{j_1 \cdots j_r} A^{\ell_r\, j_r}_{m}\ \ \underset{r}{t}^{\ell_r\, j_r *}_{m} \quad . \qquad (10a)$$

La relation d'orthogonalité (7) permet d'inverser cette définition

$$A^{\ell_r\, j_r}_{m} = (-1)^{j}\ \underset{r}{A}(\overset{r}{\cdot})\ \underset{r}{t}^{\ell_r\, j_r}_{m} \quad . \qquad (10b)$$

Parmi ces tenseurs de base sphérique, les tenseurs obtenus par les couplages maximaux, (i.e; $j_i = 1$ pour $i = 1, r$ et $\ell_k = k$ pour $k = 2$ à r) sont appelés tenseurs maximaux et notés $\underset{r}{t}^{r}_{m}$. Ces tenseurs maximaux sont complètement symétriques, orthogonaux à $\underline{e}$ et de trace nulle

$$(\underset{r}{t}^{r}_{m})^{\mu_1 \cdots \mu_k \cdots \mu_\ell \cdots \mu_r} = (\underset{r}{t}^{r}_{m})^{\mu_1 \cdots \mu_\ell \cdots \mu_k \cdots \mu_r} \quad , \qquad (11)$$

$$\underset{r}{t}^{r}_{m} \cdot \underline{e} = 0 \quad , \qquad (12)$$

$$\underset{r}{t}^{r}_{m} : \underline{\underline{g}} = 0 \quad . \qquad (13)$$

En outre ils permettent de construire directement les représentations d'ordre entier des rotations du petit groupe du quadrivecteur $\underline{e}$

$$D^{\ell}(R_e)^{m}_{\ n} = (-1)^{\ell}\ \ \underset{\ell}{t}^{\ell\, *}_{m}(\overset{\ell}{\cdot})\ (\overset{\ell}{\otimes} R_e)\ \ \underset{\ell}{t}^{\ell}_{n} \quad . \qquad (14)$$

Nous les utilisons aussi au § suivant pour définir les harmoniques sphériques d'un quadrivecteur.

6.2-Harmoniques sphériques d'un quadrivecteur

Soit $\underline{u}$ un quadrivecteur unitaire de genre espace orthogonal au vecteur de genre temps de la tétrade $\{e\}$,

$$\underline{u}^2 = -1 \quad , \quad \underline{u}.\underline{e} = 0 \quad . \tag{15}$$

Les harmoniques sphériques du quadrivecteur $\underline{u}$ dans la tétrade $\{e\}$, $Y^{\ell}_{m}(u,\{e\}) \equiv Y^{\ell}_{m}(\underline{u})$ sont obtenues en saturant les tenseurs maximaux ${}_{\ell}\underline{t}^{\ell}_{m}$ par le quadrivecteur $\underline{u}$

$$Y^{\ell}_{m}(\underline{u}) = C_{\ell}\ (-1)^{\ell}\ \ {}_{r}\underline{t}^{\ell}_{m}\ (\overset{\ell}{\cdot})\ (\overset{\ell}{\otimes}\ \underline{u}) \ , \tag{16}$$

où le coefficient C_{ℓ} est défini en (3-57). Elles satisfont la relation d'orthonormalité

$$\int Y^{\ell_1}_{m_1}(\underline{u})^{*}\ Y^{\ell_2}_{m_2}(\underline{u})\ d\Omega(\underline{u}) = \delta_{\ell_1 \ell_2}\ \delta_{m_1 m_2} \ , \tag{17}$$

où $d\Omega(\underline{u})$ est l'angle solide élémentaire du quadrivecteur $\underline{u}$ dans la tétrade $\{e\}$, défini par

$$d\Omega(\underline{u}) = 2\ \delta(\underline{u}.\underline{e})\ \delta(\underline{u}^2+1)\ d\underline{u} \quad . \tag{18}$$

Dans le référentiel où $\underline{e} = (1, \vec{0})$, la composante de temps du quadrivecteur $\underline{u}$ est nulle et ses composantes d'espace forment un trivecteur unitaire $\vec{u}$. Si $\{\vec{e}\}$ est la base vectorielle définie en (5-14), on a l'identité

$$Y^{\ell}_{m}(\underline{u},\{e\}) = Y^{\ell}_{m}(\vec{u},\{\vec{e}\}) \quad . \tag{19}$$

Cela implique que l'on peut étendre aux $Y^{\ell}_{m}(\underline{u})$, toutes les propriétés des harmoniques $Y^{\ell}_{m}(\vec{u})$ rappelées au §2-3.

Les coefficients du développement du produit tensoriel $\overset{r}{\otimes}\ \underline{u}$ sur les tenseurs de base sphérique sont des produits de coefficients-CG et d'harmoniques sphériques.

$$\overset{r}{\otimes}\ \underline{u} = \sum_{\ell_2 \cdots \ell_r} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell_r+1}}\ \Big(\prod_{k=2}^{r} \langle \ell_k 0 | \ell_{k-1} 0 1 0 \rangle\Big) \sum_{m}\ Y^{\ell_r}_{m}(\underline{u})\ \ {}_{r}\underline{t}^{\ell_r \cdots \ell_2 1 \cdots 1\ *}_{m} \ . \tag{20}$$

En inversant cette relation à l'aide de la relation d'orthogonalité (7), les sommations disparaissent et l'on a

$$\underset{r}{t}{}^{\ell_r j_r}_{m}(\overset{r}{\cdot})\ (\overset{r}{\otimes}\underline{u}) = (-1)^r\ (\prod_{i=1}^{r}\delta_{1j_i})\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell_r+1}}\ (\prod_{k=2}^{r}\langle \ell_k 0|\ell_{k-1}010\rangle)\,Y^{\ell_r}_m(\underline{u}). \quad (21)$$

Dans le cas des tenseurs maximaux, on peut calculer le produit de coefficients-CG et on retrouve la définition (16).

Etudions les propriétés de transformation des harmoniques $Y^{\ell}_m(\underline{u})$. Soient Λ une transformation quelconque de $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$, R_Λ et L_Λ la rotation et la transformation pure du développement canonique de Λ par rapport au quadrivecteur $\underline{e}$, voir §5-6. Les composantes sphériques du quadrivecteur $L_\Lambda \underline{u}$ sur la tétrade transformée $\Lambda\{e\}$ sont

$$(-1)^j(L_\Lambda \underline{u}).(\Lambda\, \underline{e}^j_n) = (-1)^j\ \underline{u}.R_\Lambda\, \underline{e}^j_n = (-1)^j\ \underline{u}.\underline{e}^j_{n'}\ D^j(R_\Lambda)^{n'}{}_n\ , \quad (22)$$

i.e. elles sont aussi les composantes de $\underline{u}$ sur la tétrade $R_\Lambda\{e\}$. Ces relations se généralisent aux harmoniques sphériques sous la forme

$$Y^{\ell}_m(L_\Lambda \underline{u},\ \Lambda\{e\}) = Y^{\ell}_m(\underline{u},R_\Lambda\{e\}) = Y^{\ell}_{m'}(\underline{u},\{e\})\ D^{\ell}(R_\Lambda)^{m'}{}_m\ . \quad (23)$$

Dans l'opération de parité, les harmoniques se transforment suivant

$$Y^{\ell}_m(P\underline{u},\{e\}) = Y^{\ell}_m(\underline{u},P\{e\}) = (-1)^{\ell}\ Y^{\ell}_m(\underline{u},\{e\})\ . \quad (24)$$

6.3-Harmoniques sphériques tensorielles sur M

Dans une tétrade $\{e\}$, les harmoniques sphériques tensorielles sur M sont construites en couplant les harmoniques sphériques avec les tenseurs de base sphérique à l'aide des coefficients-CG. On obtient

$$\underset{r}{Y}{}^{\ell\ \ell_r j_r}(\underline{u})^L_M = \langle \ell m \ell_r n|LM\rangle\ Y^{\ell}_m(\underline{u})\ \ \underset{r}{t}{}^{\ell_r j_r}_{n}\ . \quad (25)$$

Les orthogonalités des tenseurs de base (7), des harmoniques sphériques (17) et des coefficients-CG entraînent celle des harmoniques tensorielles

$$\int \underset{r}{Y}{}^{\ell\ \ell_r j_r}(\underline{u})^{L\,*}_M(\overset{r}{\cdot})\ \ \underset{r}{Y}{}^{\ell'\ell'_r\ j'_r}(\underline{u})^{L'}_{m'}\ d\Omega(\underline{u}) =$$

$$(-1)^j\ \delta_{\ell\ell'}\ (\prod_{i=2}^{r}\delta_{\ell_i\ell'_i})(\prod_{k=1}^{r}\delta_{j_k j'_k})\ \delta_{LL'}\ \delta_{MM'}\ . \quad (26)$$

Ces harmoniques satisfont les identités

$$\underset{r}{Y}{}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u})^{L\,*}_M = (-1)^{\ell+j+L+M}\ \underset{r}{Y}{}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u})^{L}_{-M}\ , \quad (27)$$

$$\underset{r}{Y}{}^{\ell\ell_r j_r}(-\underline{u})^{L}_M = (-1)^{\ell}\ \underset{r}{Y}{}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u})^{L}_M\ . \quad (28)$$

En utilisant les symboles-6j, on peut exprimer le produit contracté de deux harmoniques tensorielles en fonction des harmoniques scalaires suivant la formule

$$ {}_r\underline{Y}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u})^L_M(\overset{r}{\cdot})\,{}_r\underline{Y}^{\ell'\ell'_r j'_r}(\underline{u})^{L'}_{M'} = \Big(\prod_{i=2}^{r}\delta_{\ell_i\ell'_i}\Big)\Big(\prod_{i=1}^{r}\delta_{j_i j'_i}\Big) $$

$$ (-1)^{j+\ell'+\ell'_r+L'}\sum_{k,n}\sqrt{\frac{(2L+1)(2L'+1)(2\ell+1)(2\ell'+1)}{4\pi\,(2k+1)}}\,\langle k0|\ell0\ell'0\rangle\begin{Bmatrix} k & \ell & \ell' \\ \ell_r & L' & L\end{Bmatrix} $$

$$ \langle kn|LML'M'\rangle\; Y^k_n(\underline{u}) \quad . \qquad (29) $$

Pour situer l'orientation relative des tenseurs ${}_r\underline{Y}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u})^L_M$ à L et M fixés, pour les diverses valeurs de ℓ, des ℓ_i (i=2 à r) et des j_k (k=1 à r), considérons leurs produits scalaires deduits de l'expression précédente. Les tenseurs ayant au moins un des ℓ_i ou des j_k différents ($\ell_i \neq \ell'_i$ ou $j_k \neq j'_k$) ou des ℓ de parités opposées $(-1)^{\ell} \neq (-1)^{\ell'}$ sont orthogonaux mais on ne peut rien dire sur l'orientation des tenseurs ayant mêmes ℓ_i, mêmes j_k et des ℓ de même parité.

Les produits contractés d'une harmonique tensorielle d'ordre r, par les quadrivecteurs $\underline{e}$ et $\underline{u}$ sont respectivement

$$ {}_r\underline{Y}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u})^L_M\cdot\underline{e} = \delta_{j_r 0}\,\delta_{\ell_r\ell_{r-1}}\;{}_{r-1}\underline{Y}^{\ell\ell_{r-1}j_{r-1}}(\underline{u})^L_M \quad , \qquad (30) $$

$$ {}_r\underline{Y}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u})^L_M\cdot\underline{u} = \delta_{j_r 1}\,(-1)^{\ell+\ell_r+L}\sqrt{(2\ell+1)(2\ell_r+1)}\sum_k\begin{Bmatrix} k & \ell_{r-1} & L \\ \ell_r & \ell & 1\end{Bmatrix} $$

$$ \langle k0|10\ell0\rangle\;{}_{r-1}\underline{Y}^{k\ell_{r-1}j_{r-1}}(\underline{u})^L_M \quad . \qquad (31) $$

Dans le premier cas, on obtient zéro ou une harmonique d'ordre r-1, tandis que dans le second on obtient zéro ou une combinaison linéaire d'harmoniques d'ordre r-1.

En itérant r fois la formule (30), on déduit le produit saturé d'une harmonique tensorielle par le quadrivecteur $\underline{e}$,

$$ {}_r\underline{Y}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u})^L_M(\overset{r}{\cdot})\overset{r}{\otimes}\underline{e} = \Big(\prod_{i=2}^{r}\delta_{\ell_i 0}\Big)\Big(\prod_{k=1}^{r}\delta_{j_k 0}\Big)\,\delta_{L\ell}\,Y^L_M(\underline{u}) \quad . \qquad (32) $$

Ce produit est nul sauf pour l'harmonique $\underset{r}{\underline{Y}}^{LO..O}(\underline{u})^{L}_{M}$. De même en utilisant les relations (21) et (2-36), on peut calculer le produit saturé d'une harmonique tensorielle avec le quadrivecteur $\underline{u}$, il vient

$$\underset{r}{\underline{Y}}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u})^{L}_{M}(\overset{r}{\cdot})(\overset{r}{\otimes}\underline{u}) = (\prod_{i=1}^{r}\delta_{j_i 1})\langle \ell O|\ell_r OLO\rangle$$

$$(\prod_{k=2}^{r}\langle \ell_k O|\ell_{k-1} O1O\rangle)\, Y^{L}_{M}(\underline{u}) \quad . \tag{33}$$

Pour que ces produits ne soient pas nuls, il faut d'une part que tous les j_k soient égaux à 1 et d'autre part que que l'on ait $(-1)^{\ell} = (-1)^{k}$ et $(-1)^{\ell} = (-1)^{L+r}$ à cause de la symétrie des coefficients-CG.

6.4-Lois de transformations des harmoniques sphériques tensorielles

La relation (9) et l'identité (28) permettent de déterminer les lois de transformation par parité des harmoniques sphériques tensorielles. On a

$$\underset{r}{\underline{Y}}^{\ell\ell_r j_r}(P\underline{u},\{e\})^{L}_{M} = (-1)^{\ell}\ \underset{r}{\underline{Y}}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u},\{e\})^{L}_{M} \quad , \tag{34}$$

$$\underset{r}{\underline{Y}}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u},P\{e\})^{L}_{M} = (-1)^{\ell+j}\ \underset{r}{\underline{Y}}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u},\{e\})^{L}_{M} \quad , \tag{35}$$

où les signes $(-1)^{\ell}$ et $(-1)^{\ell+j}$ sont respectivement appelés la parité intrinsèque et la parité des harmoniques.

Soit Λ une transformation quelconque de $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$. Dans la tétrade $\Lambda\{e\}$, les harmoniques sphériques du quadrivecteur $L_{\Lambda}\underline{u}$ sont définies par

$$\underset{r}{\underline{Y}}^{\ell_r j_r}(L_{\Lambda}\underline{u}\ ,\ \Lambda\{e\})^{L}_{M} = \langle \ell m \ell_r n|LM\rangle\ Y^{\ell}_{m}(L_{\Lambda}\underline{u}\ ,\Lambda\{e\})(\overset{r}{\otimes}\Lambda)\,\underset{r}{\underline{t}}{}^{\ell_r j_r}_{n} \quad . \tag{36}$$

En utilisant les relations (8),(23) et l'identité (2-25), on montre que ces harmoniques sont reliées à celles du quadrivecteur $\underline{u}$ dans la tétrade $\{e\}$ par

$$\underset{r}{\underline{Y}}^{\ell\ell_r j_r}(L_{\Lambda}\underline{u}\ ,\Lambda\{e\})^{L}_{M} = (\overset{r}{\otimes}L_{\Lambda})\ \underset{r}{\underline{Y}}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u},\{e\})^{L}_{M'}\ D^{L}(R_{\Lambda})^{M'}{}_{M} \quad . \tag{37}$$

Dans le cas particulier où Λ est une rotation R du petit groupe de $\underline{e}$, la transformation pure L_{Λ} devient l'identité et la relation précédente s'écrit

$$ {}_r\underline{Y}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u},P\{e\})^L_M = {}_r\underline{Y}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u},\{e\})^L_{M'}\ D^L(R)^{M'}{}_M \quad . \tag{38} $$

Si la transformation Λ est une transformation pure L, la rotation R_Λ devient l'identité et l'on a

$$ {}_r\underline{Y}^{\ell\ell_r j_r}(L\underline{u},L\{e\})^L_M = (\overset{r}{\otimes} L)\ {}_r\underline{Y}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u},\{e\})^L_M \quad . \tag{39} $$

Dans ce cas, les fonctions tensorielles ${}_r\underline{Y}^{\ell\ell_r j_r}(L\underline{u},L\{e\})^L_M$ ne se projettent pas simplement sur les harmoniques ${}_r\underline{Y}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u},\{e\})^L_M$.

6.5-Harmoniques tensorielles d'ordre 1 et 2

Les harmoniques sphériques tensorielles d'ordre 1 sont les harmoniques quadrivectorielles, définies par

$$ \underline{Y}^{\ell j}(\underline{u})^L_M = \langle \ell m j n | LM\rangle\ Y^\ell_m(\underline{u})\ \underline{e}^j_n \quad . \tag{40} $$

Pour L et M fixés, les valeurs possibles de ℓ et de j sont : $j = 0, \ell = L$; $j = 1$, $\ell = L-1, L, L+1$. C'est pourquoi, on a les quatre fonctions quadrivectorielles suivantes

$$ \underline{Y}^{L0}(\underline{u})^L_M = Y^L_M(\underline{u})\ \underline{e} \quad , \tag{41a} $$

$$ \underline{Y}^{\ell 1}(\underline{u})^L_M = \langle \ell m 1 n | LM\rangle\ Y^\ell_m(\underline{u})\ \underline{e}^1_n \quad . \tag{41b} $$

La première fonction quadrivectorielle (41a) est proportionnelle au quadrivecteur de genre temps $\underline{e}$, tandis que les trois autres (41b) sont des combinaisons linéaires de quadrivecteurs de genre espace. Dans le référentiel où $\underline{e} = (1,\vec{0})$ on a $\underline{u} = (0,\vec{u})$ et ces fonctions quadrivectorielles deviennent

$$ \underline{Y}^{L0}(\underline{u})^L_M = (Y^L_M(\vec{u}),\vec{0}) \quad , \tag{42a} $$

$$ Y^{\ell 1}(\underline{u})^L_M = (0,\ \vec{Y}^\ell(\vec{u})^L_M) \quad , \tag{42b} $$

où $Y^L_M(\vec{u})$ et $\vec{Y}^\ell(\vec{u})^L_M$ sont les harmoniques sphériques scalaires et vectorielles du trivecteur $\vec{u}$, définies respectivement aux §2.3 et 3.1.

Les 16 tenseurs de la base sphérique du second ordre sont

$$ \underset{=}{t}{}^{\ell 2 j_1 j_2}_n = \langle j_1 n_1 j_2 n_2 | \ell_2 n\rangle\ \underline{e}^{j_1}_{n_1} \otimes \underline{e}^{j_2}_{n_2} \quad . \tag{43} $$

Ils satisfont la relation de symétrie suivante

$$ (\underset{=}{t}{}^{\ell 2 j_1 j_2}_n)^{\mu\nu} = (-1)^{\ell 2 + j_1 + j_2}\ (\underset{=}{t}{}^{\ell 2 j_2 j_1}_n)^{\nu\mu} \quad . \tag{44} $$

Tous les tenseurs avec $j_1 = j_2$ sont soit symétriques soit antisymétriques selon la valeur de ℓ_2, tandis que les tenseurs avec $j_1 \neq j_2$ n'ont pas de protriété de symétrie.

La trace de ces tenseurs est

$$\mathrm{tr}\ (\underset{=}{t}{}_n^{\ell_r\, j_1\, j_2}) \equiv \underline{\underline{g}} : \underset{=}{t}{}_n^{\ell_2 j_1\, j_2} = \sqrt{2j_1+1}\ \ \delta_{j_1\, j_2}\ \delta_{\ell_2 o}\ \delta_{no} \ . \qquad (45)$$

Remarquons que tous les tenseurs sauf $\underset{=}{t}{}^{ooo}$ et $\underset{=o}{t}{}^{o11}$ sont de trace nulle.

Les harmoniques sphériques tensorielles du second ordre sont construites à partir de ces tenseurs par

$$\underset{=}{Y}{}^{\ell\ell_2\, j_1\, j_2}(\underline{u})^L_M = \langle \ell m \ell_2 n | LM\rangle \ \ Y^L_M(\underline{u})\ \ \underset{=}{t}{}_n^{\ell_2\, j_1\, j_2} \ . \qquad (46)$$

Par construction elles ont les mêmes propriétés de symétrie et de trace que les tenseurs de base sphérique

$$\left[\ \underset{=}{Y}{}^{\ell\ell_2\, j_1\, j_2}\ (\underline{u})^L_M\ \right]^{\mu\nu} = (-1)^{\ell\ +j_1\ +j_2}\ \left[\ \underset{=}{Y}{}^{\ell\ell_2\, j_2\, j_1}\ (\underline{u})^L_M\ \right]^{\nu\mu} \ , \qquad (47)$$

$$\mathrm{tr}\left[\ \underset{=}{Y}{}^{\ell\ell_2\, j_1\, j_2}\ (u)^L_M\right] = \ Y^L_M(\underline{u})\ \sqrt{2\ell_1+1}\ \ \delta_{L\ell}\ \delta_{\ell_2 o}\ \delta_{j_1\, j_2} \ . \qquad (48)$$

Pour L et M fixés, les valeurs possibles de j_1, j_2, ℓ_2 et ℓ sont

$$\begin{aligned}
&j_1 = j_2 = \ell_2 = 0 && , \ \ell = L \ , \\
&\left.\begin{aligned} j_1 = 0,\ j_2 = \ell_2 = 1 \\ j_2 = 0,\ j_1 = \ell_2 = 1 \end{aligned}\right\} && , \ \ell = L\text{-}1,\ L,\ L\text{+}1 \ , \\
&j_1 = j_2 = 1 \begin{cases} \ell_2 = 0 & , \ \ell = L \ , \\ \ell_2 = 1 & , \ \ell = L\text{-}1,\ L\ ,\ L\text{+}1 \ , \\ \ell_2 = 2 & , \ \ell = L\text{-}2,\ L\text{-}1,\ L,\ L\text{+}1,\ L\text{+}2 \ . \end{cases}
\end{aligned} \qquad (49)$$

On obtient donc les 16 fonctions tensorielles suivantes

$$\underset{=}{Y}{}^{Looo}\ (\underline{u})^L_M = Y^L_M(\underline{u})\ \ \underline{e} \otimes \underline{e} \ , \qquad (50a)$$

$$\underset{=}{Y}{}^{\ell 11o}\ (\underline{u})^L_M = \underline{Y}{}^{\ell 1}(\underline{u})^L_M \otimes \underline{e} \ , \qquad (50b)$$

$$\underset{=}{Y}{}^{\ell 1o1}\ (\underline{u})^L_M = \underline{e} \otimes \underline{Y}{}^{\ell 1}(\underline{u})^L_M \ , \qquad (50c)$$

$$\underset{=}{Y}{}^{\ell\ell_2\, 11}\ (\underline{u})^L_M = \langle \ell m \ell_2 n | LM\rangle\ Y^{\ell}_m(\underline{u})\ \ \underset{=}{t}{}_n^{\ell_2\, 11} \ . \qquad (50d)$$

La première fonction tensorielle (50a) est proportionnelle au produit tensoriel par lui-même du quadrivecteur de genre temps, les fonctions

les fonctions (50b) et (50c) sont les produits tensoriels du quadrivecteur de genre temps par les harmoniques quadrivectorielles de genre espace, tandis que les fonctions (50d) sont des combinaisons linéaires de produits tensoriels de quadrivecteurs de genre espace. Dans le référentiel où $\underline{e} = (1,\vec{0})$ les harmoniques (50d) se décomposent en

$$(\underline{\underline{Y}}^{\ell\ell_2 11}\ (\underline{u})^L_M)^{\mu o} = (\underline{\underline{Y}}^{\ell\ell_2 11}\ (\underline{u})^L_M)^{o\mu} = 0 \quad \text{pour } \mu = 0,1,2,3\ , \qquad (51a)$$

$$(\underline{\underline{Y}}^{\ell\ell_2 11}\ (\underline{u})^L_M)^{ij} = (\overset{\Rightarrow}{Y}^{\ell\ell_2}(u)^L_M)^{ij} \quad \text{pour } i,j = 1,2,3 \qquad (51b)$$

où les harmoniques tensorielles d'ordre 2 du vecteur $\vec{u}$ sont définies au §3.3.

Le produit tensoriel du quadrivecteur $\underline{u}$ par une harmonique quadrivectorielle se décompose sur les harmoniques d'ordre 2 suivant la relation

$$\underline{u} \otimes \underline{Y}^{\ell j}(\underline{u})^L_M = (-1)^{L+\ell+j+1} \sum_{k\ell_2} \langle k0|10\ell 0\rangle \sqrt{(2\ell+1)(2\ell_2+1)} \begin{Bmatrix} \ell & 1 & k \\ \ell_2 & L & j \end{Bmatrix} \underline{\underline{Y}}^{k\ell_2 1 j}(\underline{u})^L_M \ . \qquad (52)$$

qui généralise la formule (3-42).

7 - MULTIPOLES TENSORIELS SUR M

La notion de multipoles tensoriels, définis sur E_3, est étendue à l'espace M. Ces multipoles ont les mêmes propriétés de transformation par parité et par rotation que les harmoniques tensorielles, mais ce sont des tenseurs deux à deux orthogonaux qui possèdent de meilleures propriétés géométriques. Ensuite, l'étude des propriétés de transformation de ces multipoles pour les transformations de Lorentz pures nous conduit à définir des multipoles irréductibles pour ces transformations. Enfin dans le dernier paragraphe, nous construisons explicitement les multipoles tensoriels irréductibles d'ordre 2.

7.1-Multipoles tensoriels sur M

Comme pour E_3, les multipoles tensoriels sur M sont des combinaisons linéaires orthonormées des harmoniques tensorielles de même parité intrinsèque et de mêmes valeurs des j_k (k = 1 à r) et des ℓ_i (i = 2 à r). Les scalaires de ces combinaisons sont des coefficients-CG de telle sorte que pour L et M fixés, ces multipoles soient des tenseurs deux à deux orthogonaux.

Les multipoles tensoriels d'ordre r sont définis à partir des harmoniques tensorielles du même ordre par les relations

$$\underset{r}{X}{}_{o}^{\ell_r j_r}(\underline{u})_M^L = \sum_{\ell} \langle \ell 0 | \ell_r 0 L 0 \rangle \; \underset{r}{Y}{}^{\ell \ell_r j_r}(\underline{u})_M^L \quad , \tag{1a}$$

$$\underset{r}{X}{}_{\pm\mu}^{\ell_r j_r}(\underline{u})_M^L = \sum_{\ell} \frac{1\pm(-1)^{L+\ell}}{\sqrt{2}} \langle \ell 0 | \ell_r \mu L -\mu \rangle \; \underset{r}{Y}{}^{\ell \ell_r j_r}(\underline{u})_M^L \quad , \; \mu > 0 \tag{1b}$$

Ce changement de fonctions tensorielles est une transformation orthogonale, il en résulte que les multipoles satisfont la même relation d'orthonormalité que les harmoniques tensorielles

$$\int \underset{r}{X}{}_{\mu}^{\ell_r j_r}(\underline{u})_M^{L\,*} \, (\overset{r}{\cdot}) \, \underset{r}{X}{}_{\mu'}^{\ell_r' j_r'}(\underline{u})_{M'}^{L'} \, d\Omega(\underline{u}) = (-1)^j \delta_{\mu\mu'} \Big(\prod_{i=2}^{r} \delta_{\ell_i \ell_i'}\Big) \Big(\prod_{k=1}^{r} \delta_{j_k j_k'}\Big) \, \delta_{LL'} \, \delta_{MM'} \tag{2}$$

Etudions les propriétés géométriques de ces multipoles. Pour L et M fixés, ce sont des tenseurs deux à deux orthogonaux, en effet on a

$$\underset{r}{X}{}_{\mu}^{\ell_r j_r}(\underline{u})_M^L \, (\overset{r}{\cdot}) \, \underset{r}{X}{}_{\mu'}^{\ell_r' j_r'}(\underline{u})_M^L = \eta_{\mu}^{\ell_r} \Big(\prod_{k=1}^{r} \delta_{j_k j_k'}\Big)\Big(\prod_{i=2}^{r} \delta_{\ell_i \ell_i'}\Big) \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \sum_{k} \langle L\mu | L\mu' k 0 \rangle \langle kn | LMLM \rangle \, Y_n^k(\underline{u}) \quad , \tag{3}$$

où $\eta_{\mu}^{\ell_r}$ est un signe défini plus loin, Eq.(16).

Le produit contracté d'un multipole tensoriel d'ordre r par les quadrivecteurs $\underline{e}$ et $\underline{u}$ est soit nul soit proportionnel à un multipole d'ordre r-1

$$\underset{r}{X}{}_{\mu}^{\ell_r j_r}(\underline{u})_M^L \cdot \underline{e} = \delta_{j_r 0} \, \delta_{\ell_r \ell_{r-1}} \, \underset{r-1}{X}{}_{\mu}^{\ell_{r-1} j_{r-1}}(\underline{u})_M^L \quad , \tag{4}$$

$$\underset{r-o}{X}^{\ell_r j_r}(\underline{u})^L_M \cdot \underline{u} = \delta_{j_r 1}(-1)^{\ell_r} < \ell_r 0 | \ell_{r-1} 010 > \underset{r-1-o}{X}^{j_{r-1}\ell_{r-1}}(\underline{u})^L_M \ , \qquad (5a)$$

$$\underset{r-\pm\mu}{X}^{\ell_r j_r}(\underline{u})^L_M \cdot \underline{u} = \pm\delta_{j_r 1}(-1)^{\ell_r} <\ell_r \mu | \ell_{r-1}\mu 10> \underset{r-1-\mp\mu}{X}^{\ell_{r-1} j_{r-1}}(\underline{u})^L_M \ , \mu>0 \qquad (5b)$$

En itérant ces relations, on déduit le produit contracté d'un multipole avec le produit tensoriel de p fois le quadrivecteur $\underline{e}$ (ou $\underline{u}$) par lui-même. On définit

$$i_o = \mathrm{Sup}\ \{r-p+1, 2\} \ , \quad 1 \leqslant p \leqslant r \ , \qquad (6)$$

et ces produits s'écrivent

$$\underset{r-\mu}{X}^{\ell_r j_r}(\overset{p}{\cdot})(\overset{p}{\otimes}\underline{e}) = \Big(\prod_{k=r-p+1}^{r} \delta_{j_k 0}\Big)\Big(\prod_{i=i_o}^{r} \delta_{\ell_i \ell_{i-1}}\Big)\ \underset{r-p-\mu}{X}^{\ell_{r-p} j_{r-p}} \ , \qquad (7)$$

$$\underset{r-o}{X}^{\ell_r j_r}(\overset{p}{\cdot})(\overset{p}{\otimes}\underline{u}) = \Big(\prod_{k=r-p+1}^{r} \delta_{j_k 1}\Big)\Big(\prod_{i=i_o}^{r} <\ell_i 0 | \ell_{i-1} 010>\Big)\ \underset{r-p-o}{X}^{\ell_{r-p} j_{r-p}}, \qquad (8a)$$

$$\underset{r-\pm\mu}{X}^{\ell_r j_r}(\overset{p}{\cdot})(\overset{p}{\otimes}\underline{u}) =$$

$$\begin{cases} \text{- si p est pair : } (-1)^{p/2}\Big(\prod_{k=r-p+1}^{r} \delta_{j_k 1}\Big)\Big(\prod_{i=i_o}^{r} <\ell_i \mu | \ell_{i-1}\mu 10>\Big)\ \underset{r-p-\pm\mu}{X}^{\ell_{r-p} j_{r-p}} \\ \text{-si p est impair:} \pm(-1)^{\frac{p-1}{2}}\Big(\prod_{k=r-p+1}^{r} \delta_{j_k 1}\Big)\Big(\prod_{i=i_o}^{r} <\ell_i \mu | \ell_{i-1}\mu 10>\Big)\ \underset{r-p-\mp\mu}{X}^{\ell_{r-p} j_{r-p}} \end{cases} \qquad (8b)$$

avec $\mu > 0$.

Ces produits sont soit nuls soit proportionnels à un multipole d'ordre r-p. Il résulte des formules (7) et (8) que pour $\mu > 0$, on a

$$\underset{r-\pm\mu}{X}^{\ell_r j_r}(\overset{p}{\cdot})(\overset{p}{\otimes}\underline{e}) = 0 \quad , \quad \text{si } p > r - \mu \ , \qquad (9)$$

$$\underset{r-\pm\mu}{X}^{\ell_r j_r}(\overset{p}{\cdot})(\otimes\ \underline{u}) = 0 \quad , \quad \text{si } p > r - \mu \ . \qquad (10)$$

A l'aide de l'équation (6-20), nous obtenons la relation

$$Y^L_M(\underline{u})(\overset{r}{\otimes}\underline{u}) = (-1)^r \sum_{\ell_2 \ell_r} \Big(\prod_{k=2}^{r} < \ell_k 0 | \ell_{k-1} 010>\Big)\ \underset{r-o}{X}^{\ell_r \ldots \ell_2 1 \ldots 1}(\underline{u})^L_M \ . \qquad (11)$$

Les définitions des harmoniques et des multipoles permettent d'écrire la formule suivante, semblable à la précédente

$$Y^L_M(\underline{u})(\overset{r}{\otimes}\underline{e}) = \underset{r}{X}^{o \ldots o \ldots o}(\underline{u})^L_M \ . \qquad (12)$$

7.2-Propriétés de transformation des multipoles tensoriels

Dans l'opération parité, les multipoles tensoriels se transforment suivant

$$ {}_{r}\underline{X}^{\ell_r\, j_r}_{\mu}(P\underline{u},\{e\})^{L}_{M} = \epsilon^{\ell_r}_{\mu}\ {}_{r}\underline{X}^{\ell_r\, j_r}_{\mu}(\underline{u},\{e\})^{L}_{M} \ , \qquad (13) $$

$$ {}_{r}\underline{X}^{\ell_r\, j_r}_{\mu}(\underline{u},P\{e\})^{L}_{M} = \eta^{\ell_r}_{\mu}\ {}_{r}\underline{X}^{\ell_r\, j_r}_{\mu}(\underline{u},\{e\})^{L}_{M} \ , \qquad (14) $$

où les signes $\epsilon^{\ell_r}_{\mu}$ et $\eta^{\ell_r}_{\mu}$ sont la parité intrinsèque et la parité des multipoles tensoriels qui diffèrent de la phase $(-1)^{j}$. Leurs valeurs se déduisent aisément des parités des harmoniques

$$ \epsilon^{\ell_r}_{\mu} = (-1)^{j}\,\eta^{\ell_r}_{\mu} = \begin{cases} (-1)^{L+\ell_r} & \text{pour } \mu = 0 \ , \\ (-1)^{L} & \text{pour } \mu > 0 \ , \\ (-1)^{L+1} & \text{pour } \mu < 0 \ . \end{cases} \qquad (15) $$

En électromagnétisme, on appelle magnétiques (respectivement électriques) les multipoles vectoriels de parité intrinsèque $(-1)^{L}$, (respectivement $(-1)^{L+1}$). Pour les vecteurs la parité est l'opposée de la parité intrinsèque et donc on appelle magnétiques les multipoles de parité $(-1)^{L+1}$ et électriques ceux de parité $(-1)^{L}$. Par analogie, nous généralisons cette nomenclature, en appelant magnétiques $\mathcal{M}$, les multipoles tensoriels d'ordre r de parité $(-1)^{L+r}$ et électriques $\mathcal{E}$ ceux de parité $(-1)^{L+r+1}$,

$$ \mathcal{M} \ : \ \eta^{\ell_r}_{\mu} = (-1)^{j}\,\epsilon^{\ell_r}_{\mu} = (-1)^{L+r} \qquad (16) $$

$$ \mathcal{E} \ : \ \eta^{\ell_r}_{\mu} = (-1)^{j}\,\epsilon^{\ell_r}_{\mu} = (-1)^{L+r+1} \qquad (17) $$

Donc les multipoles magnétiques sont les suivants

$$ \mathcal{M} \ : \ {}_{r}\underline{X}^{\ell_r\, j_r}_{o} \quad \text{avec } (-1)^{j+r} = (-1)^{\ell_r} \ , $$
$$ {}_{r}\underline{X}^{\ell_r\, j_r}_{\pm\mu} \quad \text{avec } (-1)^{j+r} = \pm 1 \ , \qquad (18) $$

tandis que les multipoles électriques sont

$$ \mathcal{E} \ : \ {}_{r}\underline{X}^{\ell_r\, j_r}_{o} \quad \text{avec } (-1)^{j+r} = -(-1)^{\ell_r} \ , $$
$$ {}_{r}\underline{X}^{\ell_r\, j_r}_{\pm\mu} \quad \text{avec } (-1)^{j+r} = \mp 1 \ . \qquad (19) $$

Les multipoles tensoriels sont des combinaisons linéaires d'harmoniques à L et M fixés. Il en résulte que les multipoles se transforment de la même manière que les harmoniques dans une transformation de Lorentz

Λ, voir l'équation (6-37)

$$\underset{r-\mu}{X^{\ell_r}} j_r(L_\Lambda \underline{u}, \Lambda\{e\})^L_M = (\overset{r}{\otimes} L_\Lambda)\ \underset{r-\mu}{X^{\ell_r}} j_r(\underline{u},\{e\})^L_{M'}\ D^L(R_\Lambda)^{M'}{}_M \quad . \qquad (20)$$

Dans le cas où Λ est une rotation R du petit groupe de $\underline{e}$, la transformation pure L_Λ devient l'identité et la relation (15) s'écrit

$$\underset{r-\mu}{X^{\ell_r}} j_r(\underline{u},R\{e\})^L_M = \underset{r-\mu}{X^{\ell_r}} j_r(\underline{u},\{e\})^L_{M'}\ D^L(R)^{M'}{}_M \quad . \qquad (21)$$

Si Λ est une transformation pure, L, la rotation R_Λ devient l'identité, et la loi de transformation (20) s'écrit

$$\underset{r-\mu}{X^{\ell_r}} j_r(L\underline{u},L\{e\})^L_M = (\overset{r}{\otimes} L)\ \underset{r-\mu}{X^{\ell_r}} j_r(\underline{u},\{e\})^L_M \quad . \qquad (22)$$

Dans le cas où L agit dans un 2-plan quelconque, on ne peut réduire simplement le produit tensoriel $\overset{r}{\otimes} L$ de l'équation (22). Dans le paragraphe suivant nous nous limitons à des transformations pures dans le 2-plan $(\underline{e},\underline{u})$, de façon à réduire ce produit tensoriel.

7.3-Notion de multipoles tensoriels irréductibles

Considérons une transformation de Lorentz pure $L(\chi)$ dans le 2-plan $(\underline{e},\underline{u})$ définie en (5-37),

$$L(\chi) = \underline{g}.+(\mathrm{ch}\,\chi-1)(\underline{e}\otimes\underline{e}.-\underline{u}\otimes\underline{u}.) - \mathrm{sh}\,\chi\ (\underline{e}\otimes\underline{u}.-\underline{u}\otimes\underline{e}.) \qquad (23)$$

et la loi de transformation des multipoles correspondante, cf.Eq.(22).

Nous avons vu, au §5-4, que le produit tensoriel de r fois l'espace de Minkowski peut être décomposé en une somme directe de $2r-1$ sous-espaces à 2 dimensions, invariants par $L(\chi)$. Nous appelons "multipoles tensoriels irréductibles" pour $L(\chi)$, les combinaisons linéaires orthonormées des multipoles $\underset{r-\mu}{X^{\ell_r}} j_r(\underline{u})^L_M$ à μ,L et M fixés, appartenant à ces sous-espaces invariants. Comme ces sous-espaces sont de dimension 2, les multipoles irréductibles sont définis par paires, chaque couple formant une base du sous-espace considéré.

Puisque les multipoles tensoriels irréductibles sont des combinaisons linéaires orthonormées des multipoles tensoriels définis au paragraphe précédent, ils conservent toutes les propriétés de ces derniers. Les

multipoles irréductibles sont des fonctions tensorielles orthonormées, des tenseurs orthogonaux, ils ont une parité déterminée et ils se transforment suivant une représentation irréductible des rotations du petit groupe du quadrivecteur de genre temps de la tétrade dans laquelle ils sont définis.

La transformation $L(\varkappa)$ est représentée par la somme directe de deux matrices 2×2, $B(\varkappa) \oplus I$, définies en (5-40,41) et le produit tensoriel de transformations $\overset{r}{\otimes} L(\varkappa)$ est représenté par le produit tensoriel de matrices $\overset{r}{\otimes} [B(\varkappa) \oplus I]$ qui se réduit en une somme directe de matrices $B(n\varkappa)$, $0 \leqslant n \leqslant r$, comme nous l'avons montré en (5-50). Par définition, chaque couple de multipoles irréductibles d'ordre r, $\underset{r-n}{\underline{X}}{}^{i}(\underline{u},\{e\})$, $i = 0,1$, se transforme suivant la représentation $B(n\varkappa)$,

$$\underset{r-n}{\underline{X}}{}^{j} (L(\varkappa)\underline{u}, L(\varkappa)\{e\}) = \sum_{i} B(n\varkappa)^{j}{}_{i} \underset{r-n}{\underline{X}}{}^{i} (\underline{u},\{e\}). \qquad (24)$$

Dans les deux paragraphes suivants, nous construisons explicitement les couples de multipoles irréductibles pour les ordres 1 et 2, en utilisant les propriétés géométriques des multipoles, et plus précisément leur orientation par rapport aux quadrivecteurs $\underline{e}$ et $\underline{u}$. Notons que les multipoles irréductibles invariants, c'est-à-dire ceux qui se transforment selon $B(0) = I$, peuvent être définis individuellement.

7.4-Multipoles quadrivectoriels irréductibles

Les multipoles quadrivectoriels sont définis à partir des harmoniques quadrivectorielles par

$$\underline{X}{}^{j}_{o}(\underline{u})^{L}_{M} = \sum_{\ell} < \ell 0 | 10L0 > \underline{Y}{}^{\ell j}(\underline{u})^{L}_{M} \quad , \qquad (25a)$$

$$\underline{X}{}^{1}_{\pm}(\underline{u})^{L}_{M} = \sum_{\ell} \frac{1 \pm (-1)^{\ell+L}}{\sqrt{2}} < \ell 0 | 11L-1 > \underline{Y}{}^{\ell j}(\underline{u})^{L}_{M} \qquad (25b)$$

En calculant les coefficients-CG, on peut expliciter ce changement de fonctions quadrivectorielles à L et M fixés,

$$\underline{X}^{o}_{o} = \underline{Y}^{Lo} \quad , \quad \underline{X}^{1}_{+} = \underline{Y}^{L1}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{X}^{1}_{o} \\ \underline{X}^{1}_{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} & -\sqrt{\frac{L}{2L+1}} \\ \sqrt{\frac{L}{2L+1}} & \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{Y}^{L+11} \\ \underline{Y}^{L-11} \end{pmatrix} \tag{26}$$

Les équations (12),(11),(4) et (5b) impliquent les identités

$$\underline{X}^{o}_{o}\,(\underline{u})^{L}_{M} = Y^{L}_{L}(\underline{u})\ \underline{e} \quad , \tag{27}$$

$$\underline{X}^{1}_{o}\,(\underline{u})^{L}_{M} = -\,Y^{L}_{M}(\underline{u})\ \underline{u} \quad , \tag{28}$$

$$\underline{X}^{1}_{\pm}\,(\underline{u})^{L}_{M}\cdot\underline{e} = \underline{X}^{1}_{\pm}(\underline{u})^{L}_{M}\cdot\underline{u} = 0 \ . \tag{29}$$

La relation (29) entraine que les multipoles $\underline{X}^{1}_{\pm}$ sont invariants dans une transformation $L(\varkappa)$ du 2-plan $(\underline{e},\underline{u})$,

$$\underline{X}^{1}_{\pm}\left[L(\varkappa)\underline{u},L(\varkappa)\{e\}\right] = \underline{X}^{1}_{\pm}\,(\underline{u},\{e\}) \tag{30}$$

Par contre les relations (27) et (28) entrainent que les multipoles $\underline{X}^{o}_{o}$ et $\underline{X}^{1}_{o}$ se transforment selon $B(\varkappa)$ et on peut écrire leur loi de transformation sous la forme

$$\underline{X}^{j}_{o}\left[L(\varkappa)\underline{u},L(\varkappa)\{e\}\right]^{L}_{M} = \sum_{i} B(\varkappa)^{j}_{\ i}\ \underline{X}^{i}_{o}\,(\underline{u},\{e\})^{L}_{M} \tag{31}$$

avec $j = 0$ ou 1 et sommation sur $i = 0$ et 1.

Les relations (30) et (31) expriment que les multipoles quadrivectoriels $\underline{X}^{j}_{\mu}(\underline{u})^{L}_{M}$ sont eux-mêmes irréductibles pour $L(\varkappa)$.

Dans le référentiel où $\underline{e} = (1,\vec{0})$, on a $\underline{u} = (0,\vec{u})$ et ces multipoles quadrivectoriels se décomposent sous la forme

$$\underline{X}^{o}_{o}(\underline{u})^{L}_{M} = (Y^{L}_{M}(\vec{u}),\ \vec{0}) \quad , \tag{32a}$$

$$\underline{X}^{1}_{\mu}(\underline{u})^{L}_{M} = (0,\ \vec{X}_{\mu}(\vec{u})^{L}_{M}) \quad , \tag{32b}$$

où les $Y^{L}_{M}(\vec{u})$ sont les harmoniques sphériques du vecteur $\vec{u}$ et où les $\vec{X}_{\mu}(\vec{u})^{L}_{M}$ sont les multipoles vectoriels sur E_3 définis en (4-1).

En utilisant les relations (18) et (19), on note que l'on a un seul multipole magnétique $\underline{X}^{1}_{+}$ et trois multipoles électriques $\underline{X}^{o}_{o}$, $\underline{X}^{1}_{o}$ et $\underline{X}^{1}_{-}$. A l'aide des indices t, pour genre temps, (proportionnel à $\underline{e}$), $\mathcal{L}$ pour longitudinal (proportionnel à $\underline{u}$) et $\mathcal{T}$ pour transverse (perpendiculaire à

$\underline{e}$ et à $\underline{u}$), on note ces multipoles

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{E}}_t(\underline{u})^L_M &= \underline{X}^0_0(\underline{u})^L_M \\
\underline{\mathcal{E}}_\ell(\underline{u})^L_M &= \underline{X}^1_0(\underline{u})^L_M \\
\underline{\mathcal{E}}_\tau(\underline{u})^L_M &= \underline{X}^1_-(\underline{u})^L_M \\
\underline{\mathcal{M}}_\alpha(\underline{u})^L_M &= \underline{X}^1_+(\underline{u})^L_M
\end{aligned} \qquad (33)$$

7.5-Multipoles tensoriels irréductibles d'ordre 2

Considérons les harmoniques tensorielles d'ordre 2, $\underline{X}^{\ell_2 j_1 j_2}_{\mu}(\underline{u})^L_M$, définis à partir des harmoniques tensorielles par

$$\underline{\underline{X}}^{\ell_2 j_1 j_2}_{o}(\underline{u})^L_M = \sum_{\ell} \langle \ell 0 | \ell_2 0 L 0 \rangle \, \underline{\underline{Y}}^{\ell \ell_2 j_1 j_2}(\underline{u})^L_M \quad , \qquad (34a)$$

$$\underline{\underline{X}}^{\ell_2 j_1 j_2}_{\pm\mu}(\underline{u})^L_M = \sum_{\ell} \frac{1\pm(-1)^{\ell+L}}{\sqrt{2}} \langle \ell 0 | \ell_2 \mu L -\mu \rangle \, \underline{\underline{Y}}^{\ell \ell_2 j_1 j_2}(\underline{u})^L_M \quad , \mu > 0 \; . \qquad (34b)$$

Pour $L \geqslant 2$ et M fixés, on a 16 multipoles tensoriels se divisant en trois groupes suivant les valeurs de j_1 et de j_2 :

i) $j_1 = j_2 = \ell_2 = 0$. On a un seul multipole proportionnel à $\underline{e} \otimes \underline{e}$

$$\underline{\underline{X}}^{000}_{o}(\underline{u})^L_M = Y^L_M(\underline{u}) \; \underline{e} \otimes \underline{e} \quad . \qquad (35)$$

ii) $j_1 = 1$, $j_2 = 0$ ou $j_1 = 0$, $j_2 = 1$. On a 6 multipoles égaux au produit tensoriel par $\underline{e}$ d'un multipole vectoriel de genre espace

$$\underline{\underline{X}}^{101}_{\mu}(\underline{u})^L_M = \underline{e} \otimes \underline{X}^1_\mu(\underline{u})^L_M \quad , \qquad (36)$$

$$\underline{\underline{X}}^{110}_{\mu}(\underline{u})^L_M = \underline{X}^1_\mu(\underline{u})^L_M \otimes \underline{e} \quad . \qquad (37)$$

iii) $j_1 = j_2 = 1$. On a 9 multipoles $\underline{\underline{X}}^{\ell_2 11}_{\mu}(\underline{u})^L_M$ qui sont des combinaisons linéaires de produits tensoriels de quadrivecteurs de genre espace. Les matrices de passage des harmoniques tensorielles $\underline{\underline{Y}}^{\ell \ell_2 11}(\underline{u})^L_M$ aux multipoles sont identiques à celles de l'équation (4-17) pour l'espace à 3 dimensions E_3.

D'après les relations (4-50,51) nous pouvons définir : 1 couple de multipoles irréductibles se transformant suivant $B(2\alpha)$, 4 couples se transformant suivant $B(\alpha)$ et 6 multipoles invariants.

Pour construire ces multipoles irréductibles nous utilisons les propriétés géométriques des $\underline{\underline{X}}^{\ell_2 j_1 j_2}_{\mu}(\underline{u})^L_M$, à l'aide des identités (38 à 47)

suivantes. La relation de fermeture (5-3) et la définition (34) conduisent à l'identité

$$Y^L_M(\underline{u})\ \underline{\underline{g}} = \underline{\underline{X}}^{ooo}_{o}(\underline{u})^L_M + \sqrt{3}\ \underline{\underline{X}}^{o11}_{o}(\underline{u})^L_M \quad . \tag{38}$$

Dans le cas où $\mu = 0$, les équations (36) et (37) s'écrivent à l'aide de (28)

$$\underline{\underline{X}}^{101}_{o}(\underline{u})^L_M = - Y^L_M(\underline{u})\ \underline{e} \otimes \underline{u} \quad , \tag{39}$$

$$\underline{\underline{X}}^{110}_{o}(\underline{u})^L_M = - Y^L_M(\underline{u})\ \underline{u} \otimes \underline{e} \quad . \tag{40}$$

Dans le cas où r = 2, la relation (11) devient, en calculant les coefficients-CG,

$$Y^L_M(\underline{u})\ \underline{u} \otimes \underline{u} = - \frac{1}{\sqrt{3}}\ \underline{\underline{X}}^{o11}_{o}(\underline{u})^L_M + \sqrt{\frac{2}{3}}\ \underline{\underline{X}}^{211}_{o}(\underline{u})^L_M \quad . \tag{41}$$

En utilisant la formule (6-52), les propriétés des symboles-6j et la définition des multipoles, on démontre les identités

$$\underline{\underline{X}}^{211}_{\pm 1}(\underline{u})^L_M = - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\underline{\underline{X}}_{\pm}(\underline{u})^L_M \otimes \underline{u} + \underline{u} \otimes \underline{\underline{X}}_{\pm}(\underline{u})^L_M\right] \quad , \tag{42}$$

$$\underline{\underline{X}}^{111}_{\pm 1}(\underline{u})^L_M = - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\underline{\underline{X}}_{\pm}(\underline{u})^L_M \otimes \underline{u} - \underline{u} \otimes \underline{\underline{X}}_{\pm}(\underline{u})^L_M\right] \quad . \tag{43}$$

Les relations (4) et (5) simpliquent, pour r = 2,

$$\underline{\underline{X}}^{111}_{o}(\underline{u})^L_M \cdot \underline{e} = \underline{e} \cdot \underline{\underline{X}}^{111}_{o}(\underline{u})^L_M = 0 \quad , \tag{44}$$

$$\underline{\underline{X}}^{211}_{\pm 2}(\underline{u})^L_M \cdot \underline{e} = \underline{e} \cdot \underline{\underline{X}}^{211}_{\pm 2}(\underline{u})^L_M = 0 \quad , \tag{45}$$

$$\underline{\underline{X}}^{111}_{o}(\underline{u})^L_M \cdot \underline{u} = \underline{u} \cdot \underline{\underline{X}}^{111}_{o}(\underline{u})^L_M = 0 \quad , \tag{46}$$

$$\underline{\underline{X}}^{211}_{\pm 2}(\underline{u})^L_M \cdot \underline{u} = \underline{u} \cdot \underline{\underline{X}}^{211}_{\pm 2}(\underline{u})^L_M = 0 \quad . \tag{47}$$

Nous notons les multipoles tensoriels irréductibles d'ordre 2 $\underline{\underline{Z}}^{xi}_{n}(\underline{u})^L_M$ ou $\underline{\underline{Z}}^{x}_{\eta}(\underline{u})^L_M$ avec les conventions suivantes :

i) la lettre Z est $\mathcal{M}$ ou $\mathcal{E}$ selon que le multipole est du type magnétique, parité $(-1)^L$, ou électrique, parité $(-1)^{L+1}$.

ii) l'indice supérieur x est s si le multipole est symétrique, et a si le multipole est antisymétrique.

iii) l'indice inférieur n = 1 ou 2 indique la représentation B(nχ) par laquelle le couple de multipoles irréductibles se transforme. Cet indice est omis pour les multipoles invariants.

iv) l'indice supérieur i = 0 ou 1 permet de repérer les deux multipoles d'un couple. Il est également omis pour les multipoles invariants qui peuvent être définis individuellement.

v) pour les multipoles invariants, l'indice η précise leurs propriétés géométriques : $\mathcal{S}$ (scalaire) proportionnel à $\underline{\underline{g}}$, $\mathcal{C}$ (transverse) orthogonal à $\underline{e}$ et à $\underline{u}$, $\mathcal{L}$ (longitudinal) dans le 2-plan $(\underline{e},\underline{u})$ à $\underline{\underline{g}}$ près dans le cas du multipole symétrique pour éliminer la trace.

Les deux multipoles irréductibles se transforment suivant $B(2\chi)$ sont du type magnétique, symétriques et de trace nulle. Ils sont construit à l'aide des relations (5-59a,b) et des identités (35,41) et (39,40) par

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{so}_{2}(\underline{u})^{L}_{M} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, Y^{L}_{M}(\underline{u})\,[\underline{e}\otimes\underline{e} + \underline{u}\otimes\underline{u}] \quad , \tag{48a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \underline{\underline{X}}^{ooo}_{o}(\underline{u})^{L}_{M} - \frac{1}{\sqrt{6}}\, \underline{\underline{X}}^{o11}_{o}(\underline{u})^{L}_{M} + \frac{1}{\sqrt{3}}\, \underline{\underline{X}}^{211}_{o}(\underline{u})^{L}_{M} \quad , \tag{48b}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{s1}_{2}(\underline{u})^{L}_{M} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, Y^{L}_{M}(\underline{u})\,[\underline{e}\otimes\underline{u} + \underline{u}\otimes\underline{e}] \quad , \tag{49a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \underline{\underline{X}}^{1o1}_{o}(\underline{u})^{L}_{M} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, \underline{\underline{X}}^{11o}_{o}(\underline{u})^{L}_{M} \quad . \tag{49b}$$

Leur loi de transformation est

$$L(\chi)\otimes L(\chi)\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{si}_{2}(\underline{u})^{L}_{M} = \sum_{j} B(2\chi)^{i}{}_{j}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{sj}_{2}(\underline{u})^{L}_{M} \quad . \tag{50}$$

Les relations (36,37) d'une part et (42,43) d'autre part nous permettent de définir les 8 multipoles irréductibles se transformant suivant $B(\chi)$. Ils sont tous de trace nulle et il y en a 4 de chaque type (magnétique, électrique) et dans chaque type 2 symétriques et 2 antisymétriques. Ils sont définis par

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{so}_{1}(\underline{u})^{L}_{M} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\underline{e}\otimes \underline{\underline{X}}^{1}_{+}(\underline{u})^{L}_{M} + \underline{\underline{X}}^{1}_{+}(\underline{u})^{L}_{M}\otimes\underline{e}] \quad , \tag{51a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \underline{\underline{X}}^{1o1}_{+1}(\underline{u})^{L}_{M} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, \underline{\underline{X}}^{11o}_{+1}(\underline{u})^{L}_{M} \quad , \tag{51b}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{s1}_{1}(\underline{u})^{L}_{M} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\underline{u}\otimes \underline{\underline{X}}^{1}_{+}(\underline{u})^{L}_{M} + \underline{\underline{X}}^{1}_{+}(\underline{u})^{L}_{M}\otimes\underline{u}] \quad , \tag{52a}$$

$$= \underline{\underline{X}}^{211}_{+1}(\underline{u})^{L}_{M} \quad , \tag{52b}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}}^{so}_{1}(\underline{u})^{L}_{M} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\underline{e}\otimes \underline{\underline{X}}^{1}_{-}(\underline{u})^{L}_{M} + \underline{\underline{X}}^{1}_{-}(\underline{u})^{L}_{M}\otimes\underline{e}] \quad , \tag{53a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \underline{\underline{X}}^{1o1}_{-1}(\underline{u})^{L}_{M} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, \underline{\underline{X}}^{11o}_{-1}(\underline{u})^{L}_{M} \quad , \tag{53b}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}}^{s1}_{1}(\underline{u})^{L}_{M} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\underline{u} \otimes \underline{X}^{1}_{-}(\underline{u})^{L}_{M} + \underline{X}^{1}_{-}(\underline{u})^{L}_{M} \otimes \underline{u}\right] \quad , \tag{54a}$$

$$= \underline{\underline{X}}^{211}_{-1}(\underline{u})^{L}_{M} \quad , \tag{54b}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{ao}_{1}(\underline{u})^{L}_{M} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\underline{e} \otimes \underline{X}^{1}_{+}(\underline{u})^{L}_{M} - \underline{X}^{1}_{+}(\underline{u})^{L}_{M} \otimes \underline{e}\right] \quad , \tag{55a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\underline{X}}^{1o1}_{+1}(\underline{u})^{L}_{M} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\underline{X}}^{11o}_{+1}(\underline{u})^{L}_{M} \quad , \tag{55b}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{a1}_{1}(\underline{u})^{L}_{M} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\underline{u} \otimes \underline{X}^{1}_{+}(\underline{u})^{L}_{M} - \underline{X}^{1}_{+}(\underline{u})^{L}_{M} \otimes \underline{u}\right] \quad , \tag{56a}$$

$$= \underline{\underline{X}}^{111}_{+1}(\underline{u})^{L}_{M} \quad , \tag{56b}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}}^{ao}_{1}(\underline{u})^{L}_{M} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\underline{e} \otimes \underline{X}^{1}_{-}(\underline{u})^{L}_{M} - \underline{X}^{1}_{-}(\underline{u})^{L}_{M} \otimes \underline{e}\right] \quad , \tag{57a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\underline{X}}^{1o1}_{-1}(\underline{u})^{L}_{M} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\underline{X}}^{11o}_{-1}(\underline{u})^{L}_{M} \quad , \tag{57b}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}}^{a1}_{1}(\underline{u})^{L}_{M} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\underline{u} \otimes \underline{X}^{1}_{-}(\underline{u})^{L}_{M} - \underline{X}^{1}_{-}(\underline{u})^{L}_{M} \otimes \underline{u}\right] \quad , \tag{58a}$$

$$= \underline{\underline{X}}^{111}_{-1}(\underline{u})^{L}_{M} \quad . \tag{58b}$$

Leur loi de transformation s'écrit :

$$L(\chi) \otimes L(\chi)\ \underline{\underline{Z}}^{xi}_{1}(\underline{u})^{L}_{M} = B(\chi)^{i}_{\ j}\ \underline{\underline{Z}}^{xj}_{1}(\underline{u})^{L}_{M} \tag{59}$$

où Z peut être remplacé par $\mathcal{M}$ et $\mathcal{E}$ et x par s et a.

Il reste à définir les 6 multipoles invariants. L'identité (38) permet de définir le seul multipole de trace non nulle, il est de type magnétique et proportionnel au tenseur $\underline{\underline{g}}$, c'est pourquoi on l'appelle scalaire ($\mathcal{S}$)

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\mathcal{S}}{}^{s}(\underline{u})^{L}_{M} = \frac{1}{2}\,Y^{L}_{M}(\underline{u})\ \underline{\underline{g}} \quad , \tag{60a}$$

$$= \frac{1}{2}\,\underline{\underline{X}}^{ooo}_{o}(\underline{u})^{L}_{M} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\underline{\underline{X}}^{211}_{o}(\underline{u})^{L}_{M} \quad . \tag{60b}$$

Avec les quadrivecteurs $\underline{e}$ et $\underline{u}$ et le tenseur $\underline{\underline{g}}$, on construit 2 autres multipoles invariants de type magnétique et de trace nulle, l'un symétrique, l'autre antisymétrique, à l'aide des groupes de formule (5-60a), (35,38,41), d'une part, et (5-60b), (39,40) d'autre part. Ce sont

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\mathcal{L}}{}^{s}(\underline{u})^{L}_{M} = Y^{L}_{M}(\underline{u})^{L}_{M}\left(\underline{e} \otimes \underline{e} - \underline{u} \otimes \underline{u} - \frac{1}{2}\,\underline{\underline{g}}\right) \quad , \tag{61a}$$

$$= \frac{1}{2}\,\underline{\underline{X}}^{ooo}_{o}(\underline{u})^{L}_{M} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\underline{\underline{X}}^{o11}_{o}(\underline{u})^{L}_{M} - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\underline{\underline{X}}^{211}_{o}(\underline{u})^{L}_{M} \quad , \tag{61b}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\mathcal{L}}^{a}(\underline{u})_M^L = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_M^L(\underline{u}) \left[\underline{e} \otimes \underline{u} - \underline{u} \otimes \underline{e}\right] , \tag{62a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\underline{X}}_{o}^{1o1}(\underline{u})_M^L - \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\underline{X}}_{o}^{11o}(\underline{u})_M^L . \tag{62b}$$

Quant aux 3 derniers multipoles invariants, ce sont les multipoles $\underline{\underline{X}}_{o}^{111}$ et $\underline{\underline{X}}_{\pm 2}^{211}$ eux-mêmes, qui sont orthogonaux aux quadrivecteurs $\underline{e}$ et $\underline{u}$ comme le montrent les équations (44 à 47). Ils sont tous les trois de trace nulle, $\underline{\underline{X}}_{+2}^{211}$ est symétrique de type magnétique, $\underline{\underline{X}}_{-2}^{211}$ et $\underline{\underline{X}}_{o}^{111}$ sont tous deux de type électrique, le premier est symétrique et le second antisymétrique

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\mathcal{E}}^{s}(\underline{u})_M^L = \underline{\underline{X}}_{+2}^{211}(\underline{u})_M^L , \tag{63}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}}_{\mathcal{E}}^{s}(\underline{u})_M^L = \underline{\underline{X}}_{-2}^{211}(\underline{u})_M^L , \tag{64}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}}_{\mathcal{E}}^{a}(\underline{u})_M^L = \underline{\underline{X}}_{o}^{111}(\underline{u})_M^L . \tag{65}$$

Nous récapitulons le changement de fonctions tensorielles des multipoles aux multipoles irréductibles dans le tableau suivant

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_2^{so} \\ \mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{s} \\ \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o^{oco} \\ X_o^{111} \\ X_o^{211} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{M}_2^{s1} \\ \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o^{1o1} \\ X_o^{11o} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_1^{so} \\ \mathcal{M}_1^{ao} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_+^{1o1} \\ X_+^{11o} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1^{so} \\ \mathcal{E}_1^{ao} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_-^{1o1} \\ X_-^{11o} \end{bmatrix} \tag{66}$$

$$\mathcal{M}_1^{s1} = X_{+1}^{211} \; ; \; \mathcal{E}_1^{s1} = X_{-1}^{211} \; , \; \mathcal{M}_1^{a1} = X_{+1}^{111} , \; \mathcal{E}_1^{a1} = X_{-1}^{111} ,$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{s} = X_{+2}^{211} , \; \mathcal{E}_{\mathcal{E}}^{s} = X_{-2}^{211} \; ; \; \mathcal{E}_{\mathcal{E}}^{a} = X_o^{111} .$$

S E C O N D E P A R T I E

DEVELOPPEMENT MULTIPOLAIRE

DES FONCTIONS DE VERTEX

CHAPITRE TROISIEME

DEVELOPPEMENT MULTIPOLAIRE DES FONCTIONS

DE VERTEX A UNE PARTICULE FINALE

8 - RAPPELS SUR LES ETATS A UNE PARTICULE

Dans cette section nous rappelons les notions de tétrade adaptée à une impulsion, de tétrades conjuguées, de rotation de Wigner généralisée, ainsi que les lois de transformation des états à une particule. Enfin, nous définissons les états standard à une particule, dont la loi de transformation ne dépend plus de l'impulsion de l'état.

8.1-Tétrades spéciales [Min.68]

Soit $\underline{p}$ un quadrivecteur de genre temps $\underline{p}^2 > 0$ quelconque ; nous lui associons un vecteur unitaire de genre temps $\hat{\underline{p}}$ par

$$\hat{\underline{p}} = \frac{1}{\sqrt{\underline{p}^2}}\ \underline{p} \quad . \tag{1}$$

Nous disons qu'une tétrade, notée $\{p\}$, est adaptée au quadrivecteur $\underline{p}$ si son quadrivecteur de genre temps est $\hat{\underline{p}}$.

Soient $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_2$ deux quadrivecteurs de genre temps quelconques. Les tétrades $\{p_i\}$ $(i = 1,2)$, adaptées aux quadrivecteurs $\underline{p}_i$ sont dites conjuguées si elles sont reliées par la transformation de Lorentz pure $L(p_j \leftarrow p_i) \equiv L(\hat{p}_j \leftarrow \hat{p}_i)$ qui applique $\hat{p}_i$ sur $\hat{p}_j$ en laissant invariant le 2-plan orthogonal à $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_2$, cf.Eq.(5-31), c'est-à-dire

$$\{p_j\} = L(p_j \leftarrow p_i)\ \{p_i\} \quad . \tag{2}$$

Dans la suite nous considérons une tétrade fixe, appelée tétrade de référence, notée $\{e\}$ et nous utiliserons l'abréviation $L(b)$ pour $L(b \leftarrow e)$. La tétrade adaptée à $\underline{p}_i$ et conjuguée de $\{e\}$ est notée $\{p_i\}_e$,

$$\{p_i\}_e = L(p_i)\{e\}, \tag{3}$$

tandis que $[p_i]$ représente la transformation de Lorentz qui applique la tétrade de référence $\{e\}$ sur une tétrade adaptée à p_i quelconque

$$\{p_i\} = [p_i]\{e\} \quad . \tag{4}$$

Une tétrade adaptée à l'impulsion $\underline{p}_i$ est appelée une tétrade d'hélicité pour le 2-plan $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$ si son axe 3 est l'axe d'hélicité $\underline{h}_i$

du 2-plan $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$, défini par

$$\underline{h}_i = N \{-, \hat{p}_i | \hat{p}_1, \hat{p}_2\} \quad , \tag{5}$$

avec

$$N = \{\hat{p}_2, \hat{p}_1 | \hat{p}_1, \hat{p}_2\}^{-\frac{1}{2}} = [(\hat{\underline{p}}_1 \cdot \hat{\underline{p}}_2)^2 - 1]^{-\frac{1}{2}} \quad . \tag{6}$$

où nous avons utilisé les notations

$$\{-, b | c, d\} = \underline{c}(\underline{b} \cdot \underline{d}) - \underline{d}(\underline{b} \cdot \underline{c}) \quad , \tag{7a}$$

$$\{a, b | c, d\} = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d})(\underline{b} \cdot \underline{c}) \quad . \tag{7b}$$

Dans le cas particulier où le quadrivecteur $\underline{e}$ est situé dans le 2-plan $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$, nous définissons un quadrivecteur $\underline{u}$, unitaire, de genre espace, orthogonal à $\underline{e}$ ($\underline{u}^2 = -1$, $\underline{u} \cdot \underline{e} = 0$), qui forme avec lui une base orthogonale du 2-plan $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$,

$$\underline{u} = N \{-, e | \hat{p}_1, \hat{p}_2\} \quad , \quad \text{si } \underline{e} \in (\underline{p}_1, \underline{p}_2) \tag{8}$$

où la constante N est définie en (6).

Il faut remarquer que, inversement, le quadrivecteur $\underline{e}$ s'exprime très simplement en fonction de $\underline{u}$,

$$\underline{e} = N \{-, u | \hat{p}_1, \hat{p}_2\} \tag{9}$$

et que le quadrivecteur $\underline{u}$ est relié aux axes d'hélicité par la transformation de Lorentz pure $L(p_i)$

$$\underline{h}_i = L(p_i)\, \underline{u} \quad . \tag{10}$$

8.2-Rotations de Wigner généralisées

Soient $\underline{p}$ un quadrivecteur de genre temps et Λ une transformation quelconques de $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$. Considérons deux tétrades $\{p\}$ et $\{\Lambda p\}$ adaptées à $\underline{p}$ et $\Lambda\underline{p}$, déduites de la tétrade de référence $\{e\}$ par

$$\{p\} = [p]\{e\} \quad , \quad \{\Lambda p\} = [\Lambda p]\{e\} \quad . \tag{11}$$

La transformation de Lorentz $[\Lambda p][p]^{-1}$ qui relie ces deux tétrades,

$$\{\Lambda p\} = [\Lambda p][p]^{-1}\{p\} \tag{12}$$

est égale au produit de la transformation Λ par la rotation R_p du petit groupe de $\underline{p}$,

$$R_p = \Lambda^{-1} [\Lambda p][p]^{-1} \quad . \tag{13}$$

Par définition, la rotation de Wigner généralisée, associée aux tétrades $\{p\}, \{\Lambda p\}$ et à la transformation de Lorentz Λ, est la rotation $R_e(\{p\}, \{\Lambda p\}, \Lambda)$ du petit groupe de $\underline{e}$ conjuguée par la transformation $[p]$ de la rotation R_p,

$$R_e(\{p\}, \{\Lambda p\}, \Lambda) = [p]^{-1} R_p [p] \quad , \tag{14}$$

soit en utilisant la définition (13)

$$R_e(\{p\}, \{\Lambda p\}, \Lambda) = [p]^{-1} \Lambda^{-1} [\Lambda p] \quad . \tag{15}$$

Considérons deux tétrades $\{\Lambda^{-1} p\}$ et $\{p\}^{\Lambda} = \Lambda\{\Lambda^{-1} p\}$. Elles se déduisent de $\{e\}$ par

$$\{\Lambda^{-1} p\} = [\Lambda^{-1} p] \{e\} \quad , \tag{16}$$

$$\{p\}^{\Lambda} \equiv \Lambda\{\Lambda^{-1} p\} = \Lambda [\Lambda^{-1} p] \{e\} \quad . \tag{17}$$

A l'aide de la transformation de Lorentz $[p]^{\Lambda}$ définie par

$$[p]^{\Lambda} = \Lambda [\Lambda^{-1} p] \Lambda^{-1} \quad , \tag{18}$$

nous pouvons écrire la relation (17) sous la forme

$$\{p\}^{\Lambda} = [p]^{\Lambda} (\Lambda \{e\}) \quad . \tag{19}$$

En comparant cette équation avec l'équation (16), nous remarquons que les tétrades $\{\Lambda^{-1} p\}$ et $\{p\}^{\Lambda}$ se déduisent, d'une manière analogue des tétrades $\{e\}$ et $\Lambda\{e\}$. Dans le premier cas, la transformation Λ^{-1} agit sur le quadrivecteur $\underline{p}$ et la tétrade de référence est fixe, tandis que dans le second cas le quadrivecteur $\underline{p}$ ne change pas et l'on choisit $\Lambda\{e\}$ comme nouvelle tétrade de référence. Alors nous avons l'identité remarquable

$$R_e(\{p\}, \{p\}^{\Lambda}, I) = R_e(\{p\}, \{\Lambda^{-1} p\}, \Lambda^{-1}) \quad , \tag{20}$$

où I est la transformation identité qui sera omise dans la suite,

$$R_e(\{p\}, \{p\}^{\Lambda}) \equiv R_e(\{p\}, \{p\}^{\Lambda}, I) \quad . \tag{21}$$

Plaçons nous dans le cas particulier où la tétrade adaptée à $\underline{p}$ est conjuguée de $\{e\}$ et définie en (3). Considérons les trois tétrades définies ci-dessous

$$\{\Lambda^{-1} e\}_e = L_{\Lambda^{-1}} \{e\} \quad , \tag{22}$$

$$\{\Lambda^{-1} p\}_{\Lambda^{-1} e} = L(\Lambda^{-1} p \leftarrow \Lambda^{-1} e) \{\Lambda^{-1} e\}_e = L(\Lambda^{-1} p \leftarrow \Lambda^{-1} e) L(\Lambda^{-1} e \leftarrow e) \{e\} , \tag{23}$$

$$\{p\}^{\Lambda}_e = \Lambda\{\Lambda^{-1} p\}_{\Lambda^{-1} e} = L(p \leftarrow e) L(e \leftarrow \Lambda e) (\Lambda \{e\}) = L(p) R_{\Lambda} \{e\} . \tag{24}$$

La tétrade $\{\Lambda^{-1}e\}_e$ est adaptée à $\Lambda^{-1}e$ et conjuguée de $\{e\}$. La tétrade $\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e}$ est adaptée à $\Lambda^{-1}p$ et conjuguée de la précédente et enfin $\{p\}_e^{\Lambda}$ est adaptée à $\underline{p}$ et se déduit par Λ de $\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e}$, comme dans l'équation (17). La seconde égalité de (24) est obtenue à l'aide de l'identité (5-34). Pour ces tétrades les rotations de Wigner deviennent simplement,

$$R_e(\{p\}_e,\{p\}_e^{\Lambda}) = R_e(\{p\}_e,\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e}, \Lambda^{-1}) = R_{\Lambda} \quad , \tag{25}$$

elles sont donc indépendantes du quadrivecteur $\underline{p}$. C'est cette identité qui nous permettra de définir les états standard à une particule au §8-4.

8.3-Lois de transformations des états à une particule [Wig.39],[Wig.60], [Mo.St.68]

Les états d'une particule de spin s, de masse M et d'impulsion $\underline{p}$ ($\underline{p}^2 = M^2$) sont notés $|\{p\}\ n\rangle$ où n est le nombre quantique magnétique le long du troisième axe de genre espace de la tétrade $\{p\}$ adaptée à l'impulsion $\underline{p}$.

Une transformation de Lorentz Λ, du groupe restreint, induit une transformation sur les états par l'action d'un opérateur unitaire $U(\Lambda)$,

$$U(\Lambda)|\{\Lambda^{-1}p\}\ n\rangle \equiv \Lambda|\{\Lambda^{-1}p\}\ n\rangle \quad , \tag{26a}$$

$$= |\{p\}\ n'\rangle\ D^s\ [R_e(\{p\},\{\Lambda^{-1}p\},\Lambda^{-1})]^{n'}_{\ n} \quad , \tag{26b}$$

où la rotation de Wigner généralisée est définie en (15).

La loi de transformation des états dans l'opération de parité P s'effectue par l'action d'un opérateur unitaire U(P),

$$U(P)|\{e\}'n\rangle = \epsilon|\{e\}'n\rangle \quad , \tag{27}$$

avec

$$\{e\}' = L(p^{-1}\ \{p\} \quad , \tag{28}$$

où $|\{e\}'n\rangle$ représente les états de la particule au repos et où $\epsilon = \pm 1$ est la parité intrinsèque de la particule. A l'aide de l'équation (5-34) on démontre l'identité

$$PL(p) = L(Pp)P \quad , \tag{29}$$

et on en déduit une relation équivalente sur les opérateurs

$$U(P)\ U[L(P)] = U[L(Pp)]\ U(P) \ . \tag{30}$$

L'identité (30) permet d'obtenir la loi de transformation par parité des états d'impulsion $\underline{p}$

$$U(P)|\{p\}\ n\rangle = \epsilon|L(Pp)\ \{e\}'n\rangle \quad , \tag{31a}$$

$$= \epsilon|\{Pp\}n'\rangle\ D^{s}\left[R_{e}(\{Pp\},\{p\},L^{-1}(Pp\leftarrow p)\right]^{n'}{}_{n} \ . \tag{31b}$$

Le renversement du temps T induit une transformation sur les états par l'action d'un opérateur antiunitaire U(T) tel que

$$U(T)|\{e\}'n\rangle = (-1)^{s+n}|\{e\}'-n\rangle \ . \tag{32}$$

Comme pour la parité, on démontre à l'aide de (5-34) la relation

$$U(T)\ U[L(p)] = U[L(Pp)]\ U(T) \quad , \tag{33}$$

qui permet d'obtenir la loi de transformation par renversement du temps des états d'impulsion $\underline{p}$

$$U(T)\ |\ \{p\}n\rangle = (-1)^{s+n}|L(Pp)\{e\}'-n\rangle \quad , \tag{34a}$$

$$= (-1)^{s+n}|\{Pp\}n'\rangle\ D^{s}\left[R_{e}(\{Pp\},\{p\},L^{-1}(Pp\leftarrow p))\right]^{n'}{}_{n} \ . \tag{34b}$$

Remarquons que jusqu'ici nous avons adopté le point de vue actif c'est-à-dire nous avons transformé le quadrivecteur $\underline{p}$ en maintenant fixe la tétrade de référence. Mais nous pouvons aussi étudier les lois de transformation des états en adoptant le point de vue passif, c'est-à-dire en maintenant fixe le quadrivecteur $\underline{p}$ et en changeant de tétrade de référence.

Par exemple la loi de transformation des états dans une transformation Λ du groupe restreint s'écrit

$$|\{p\}^{\Lambda}\ n'\rangle = |\{p\}n'\rangle\ D^{s}\left[R_{e}(\{p\},\{p\}^{\Lambda})\right]^{n'}{}_{n} \ . \tag{35}$$

L'équivalence des relations (26) et (35), déduite des identités (17) et (20), traduit l'équivalence des points de vue actif et passif.

8.4-Etats standard à une particule

Nous allons choisir des tétrades spéciales pour simplifier les rotations de Wigner apparaissant dans les lois de transformation des états. Les états correspondant à ces tétrades spéciales sont appelés les états standard.

Si nous choisissons comme tétrades $\{\Lambda^{-1}p\}$, $\{p\}$ et $\{p\}^{\Lambda}$, respectivement les tétrades $\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e}$, $\{p\}_{e}$, $\{p\}^{\Lambda}_{e}$ définies par les équations (23).

(3) et (24), les rotations $R_e(\{p\}_e, \{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e}, \Lambda^{-1})$ et $R_e(\{p\}_e, \{p\}^{\Lambda}_e)$ deviennent égales à R_Λ, voir équation (25), et les lois de transformation (26) et (35) s'écrivent alors

$$U(\Lambda)|\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e}\ n\rangle = |\{p\}^{\Lambda}_e\ n\rangle = |\{p\}_e n'\rangle\, D^s(R_\Lambda)^{n'}{}_n \ . \qquad (36)$$

Le quadrivecteur $\underline{e}$ est invariant par parité, $P\,\underline{e} = \underline{e}$, et les quadrivecteurs $\underline{e}$, $\underline{p}$ et $P\underline{p}$ sont dans le même 2-plan,

$$P\underline{p} + \underline{p} = 2(\underline{p}.\underline{e})\ \underline{e} \ . \qquad (37)$$

C'est pourquoi les transformations de Lorentz pure de ce 2-plan forment un groupe et l'on a

$$L(Pp \leftarrow e)\ L^{-1}(p \leftarrow e) = L(Pp \leftarrow p) \qquad (38)$$

ce qui implique

$$R_e[\{Pp\}_e,\ \{p\}_e,\ \vec{L}^{-1}(Pp \leftarrow p)] = I \qquad (39)$$

et les lois de transformation (31) et (34): deviennent

$$U(P)|\{p\}_e\ n\rangle = \epsilon|\{Pp\}_e\ n\rangle \ , \qquad (40)$$

$$U(T)|\{p\}_e\ n\rangle = (-1)^{s+n}|\{Pp\}_e\ -n\rangle \ . \qquad (41)$$

Nous utiliserons ces états standard dans la section suivante pour définir les fonctions de vertex standard.

9 - FONCTIONS DE VERTEX REDUITES

Cette section commence par le rappel des propriétés d'un opérateur tensoriel et de la définition des fonctions de vertex. Ensuite, pour simplifier leurs lois de transformation nous définissons les fonctions de vertex standard et réduites que nous paramétrons dans un référentiel quelconque alors que les paramétrisations données par plusieurs auteurs ne sont valables que dans des référentiels particuliers.

9.1-Lois de transformation d'un opérateur tensoriel

Soit $\underset{r}{A}$ un opérateur tensoriel d'ordre r. Une transformation de Lorentz Λ, du groupe restreint, induit sur l'opérateur $\underset{r}{A}$, par l'action de l'opérateur $U(\Lambda)$ définie en (8-26), la transformation suivante

$$U(\Lambda)\ \underset{r}{A}\ U(\Lambda)^{-1} = (\overset{r}{\otimes}\ \Lambda)\ \underset{r}{A}\ . \qquad (1)$$

L'opérateur tensoriel $\underset{r}{A}$ a une <u>parité intrinsèque ϵ</u> définie, si sa loi de transformation par parité P est

$$U(P)\ \underset{r}{A}\ U(P)^{-1} = \epsilon\ (\overset{r}{\otimes}\ P)\ \underset{r}{A}\ , \qquad (2)$$

où U(P) est l'opérateur unitaire défini en (8-27). La parité intrinsèque de l'opérateur est $\epsilon = +1$ pour les vrais tenseurs et $\epsilon = -1$ pour les pseudo-tenseurs.

L'invariance par renversement du temps T implique

$$U(T)\ \underset{r}{A}\ U(T)^{-1} = \epsilon_T\ (\overset{r}{\otimes}\ T)\ \underset{r}{A}\ , \qquad (3)$$

où U(T) est l'opérateur antiunitaire défini en (8-32) et $\epsilon_T = \pm 1$.

<u>9.2-Fonctions de vertex</u>

Les fonctions de vertex de l'opérateur tensoriel $\underset{r}{A}$ sont les éléments de matrice de cet opérateur sur la base des états à une particule. Pour deux particules de spin s_1 et s_2, deux bosons ou deux fermions, les $(2s_1+1)(2s_2+1)$ fonctions de vertex de l'opérateur tensoriel $\underset{r}{A}$ sont définies par

$$\underset{r}{A}(\{p_2\},\{p_1\})^{n_2}{}_{n_1} = \langle \{p_2\}\ n_2 | \underset{r}{A} | \{p_1\}\ n_1 \rangle . \qquad (4)$$

Etudions les propriétés de transformation de ces fonctions de vertex. Celles qui correspondent à des états d'impulsion $\Lambda^{-1}p_i, (i = 1,2)$ sont définies de la même manière par

$$\underset{r}{A}(\{\Lambda^{-1}p_2\},\{\Lambda^{-1}p_1\})^{m_2}{}_{m_1} = \langle \{\Lambda^{-1}p_2\}\ m_2 | \underset{r}{A} | \{\Lambda^{-1}p_1\}\ m_1 \rangle , \qquad (5)$$

et elles sont reliées aux précédentes. En effet, en utilisant successivement les lois de transformation des états (8-26) et de l'opérateur (1), nous obtenons d'abord,

$$\underset{r}{A}(\{\Lambda^{-1}p_2\},\{\Lambda^{-1}p_1\})^{m_2}{}_{m_1} = D^{s_2}\left[R_e^{-1}(\{p_2\},\{\Lambda^{-1}p_2\},\Lambda^{-1})\right]^{m_2}{}_{n_2}$$

$$\langle \{p_2\} n_2 | U(\Lambda)\ \underset{r}{A}\ U(\Lambda)^{-1} | \{p_1\}\ n_1 \rangle\ D^{s_1}\left[R_e(\{p_1\},\{\Lambda^{-1}p_1\},\Lambda^{-1})\right]^{n_1}{}_{m_1} \qquad (6)$$

puis la relation

$$(\overset{r}{\otimes}\ \Lambda^{-1})\ \underset{r}{A}(\{\Lambda^{-1}p_2\},\{\Lambda^{-1}p_1\})^{m_2}{}_{m_1} = D^{s_2}(R_{w_2}^{-1})^{m_2}{}_{n_2}\ \underset{r}{A}(\{p_2\},\{p_1\})^{n_2}{}_{n_1}$$

$$D^{s_1}(R_{w_1})^{n_1}{}_{m_1} , \qquad (7)$$

où nous avons posé

$$R_{w_i} = R_e(\{p_i\},\{\Lambda^{-1}p_i\},\Lambda^{-1}) \quad . \tag{8}$$

La relation (8-35) conduit à l'équation

$$\underline{\underline{A}}(\{\Lambda^{-1}p_2\},\{\Lambda^{-1}p_1\})^{m_2}{}_{m_1} = \langle\{p_2\}^{\Lambda}{}_{m_2}|\, U(\Lambda)\ \underline{\underline{A}}\ U^{-1}(\Lambda)\,|\{p_1\}^{\Lambda}{}_{m_1}\rangle \ , \tag{9}$$

où les tétrades $\{p_i\}^{\Lambda}$ sont définies en (8-17). La loi de transformation de l'opérateur (1) permet d'écrire l'expression précédente sous la forme

$$(\overset{r}{\otimes}\Lambda^{-1})\ \underline{\underline{A}}(\{\Lambda^{-1}p_2\},\{\Lambda^{-1}p_1\})^{m_2}{}_{m_1} = \underline{\underline{A}}(\{p_1\}^{\Lambda},\{p_2\}^{\Lambda})^{m_2}{}_{m_1} \ , \tag{10}$$

et en comparant avec l'équation (7) on en déduit la loi de transformation des fonctions de vertex dans le changement de tétrade de référence de $\{e\}$ à $\Lambda\{e\}$

$$\underline{\underline{A}}(\{p_2\}^{\Lambda},\{p_1\}^{\Lambda})^{m_2}{}_{m_1} = D^{s_2}(R_{w_2}^{-1})^{m_2}{}_{n_1}\ \underline{\underline{A}}(\{p_2\},\{p_1\})^{n_2}{}_{n_1}\ D^{s_1}(R_{w_1})^{n_1}{}_{m_1} \tag{11}$$

9.3-Fonctions de vertex standard

Les lois de transformation (7) et (11) font intervenir deux rotations de Wigner différentes R_{w_1} et R_{w_2} dépendant des impulsions $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_2$, nous allons définir les fonctions de vertex standard dont la loi de transformation s'écrit avec une seule rotation R_{Λ}, indépendante de $\underline{p}_1$ et de $\underline{p}_2$.

En utilisant les états standard $|\{p_i\}_e\ n_i\rangle$, $|\{p_i\}^{\Lambda}_e\ n_i'\rangle$ et $|\{\Lambda^{-1}p_i\}_{\Lambda^{-1}e}\ m_i\rangle$ définis au paragraphe 8-4, nous définissons les fonctions de vertex standard, notées $\underline{\underline{A}}(p_2,p_1,\{e\})^{n_2}{}_{n_1}$, $\underline{\underline{A}}(p_2,p_1,\Lambda\{e\})^{n_2'}{}_{n_1'}$, $\underline{\underline{A}}(\Lambda^{-1}p_2,\Lambda^{-1}p_1,\{e\})^{m_2}{}_{m_1}$ et définies par

$$\underline{\underline{A}}(p_2,p_1,\{e\})^{n_2}{}_{n_1} = \underline{\underline{A}}(\{p_2\}_e,\{p_1\}_e)^{n_2}{}_{n_1} \ , \tag{12}$$

$$\underline{\underline{A}}(p_2,p_1,\Lambda\{e\})^{n_2'}{}_{n_1'} = \underline{\underline{A}}(\{p_2\}^{\Lambda}_e,\{p_1\}^{\Lambda}_e)^{n_2'}{}_{n_1'} \ , \tag{13}$$

$$\underline{\underline{A}}(\Lambda^{-1}p_2,\Lambda^{-1}p_1,\{e\})^{m_2}{}_{m_1} = \underline{\underline{A}}(\{\Lambda^{-1}p_2\}_{\Lambda^{-1}e},\{\Lambda^{-1}p_1\}_{\Lambda^{-1}e})^{m_2}{}_{m_1} \ . \tag{14}$$

Les lois de transformation (7) et (11) deviennent alors

$$(\overset{r}{\otimes}\Lambda^{-1})\ \underline{\underline{A}}(\Lambda^{-1}p_2,\Lambda^{-1}p_1,\{e\})^{m_2}{}_{m_1} = D^{s_2}(R_{\Lambda}^{-1})^{m_2}{}_{n_2}\ \underline{\underline{A}}(p_2,p_1,\{e\})^{n_2}{}_{n_1}\ D^{s_1}(R_{\Lambda})^{n_1}{}_{m_1} \tag{15}$$

$$\underline{\underline{A}}(p_2,p_1,\Lambda\{e\})^{n_2'}{}_{n_1'} = D^{s_2}(R_{\Lambda}^{-1})^{n_2'}{}_{n_2}\ \underline{\underline{A}}(p_2,p_1,\{e\})^{n_2}{}_{n_1}\ D^{s_1}(R_{\Lambda})^{n_1}{}_{n_1'} \ . \tag{16}$$

Ces fonctions de vertex standard ne dépendent que des impulsions et du choix de la tétrade de référence. Elles sont reliées aux fonctions de vertex dans des tétrades arbitraires par

$$\underset{r}{\underline{A}}(p_2,p_1,\{e\})^{n_2}{}_{n_1} = D^{s_2}[L(p_2)^{-1}[p_2]]^{n_2}{}_{n_2'}\ \underset{r}{\underline{A}}(\{p_2\},\{p_1\})^{n_2'}{}_{n_1'}\ D^{s_1}[[p_1]^{-1}L(p_1)]^{n_1'}{}_{n_1} \quad . \tag{17}$$

Etudions les lois de transformation des fonctions de vertex standard dans les opérations de parité P et de renversement du temps T.

Considérons d'abord la parité; en utilisant successivement les équations (8-40) et (2), nous obtenons

$$\underset{r}{\underline{A}}(p_2,p_1,\{e\})^{n_2}{}_{n_1} = \epsilon\epsilon_1\epsilon_2\ (\overset{r}{\otimes} P)\ \underset{r}{\underline{A}}(Pp_2,Pp_1,\{e\})^{n_2}{}_{n_1} \tag{18}$$

où ϵ, ϵ_1, ϵ_2 sont respectivement les parités intrinsèques de l'opérateur et de chacune des particules.

De même pour le renversement du temps, l'utilisation des équations (8-41) et (3) conduit à la loi de transformation

$$\underset{r}{\underline{A}}(p_2,p_1,\{e\})^{n_2}{}_{n_1} = \epsilon_T\ (-1)^{s_1-s_2+n_1-n_2}(\overset{r}{\otimes} T)\ \underset{r}{\underline{A}}(Pp_2,Pp_1,\{e\})^{-n_2}{}_{-n_1}{}^{*} \tag{19}$$

où $\epsilon_T = \pm 1$ caractérise le comportement de l'opérateur $\underset{r}{\underline{A}}$ dans le renversement du temps et où la conjugaison complexe provient de l'antiunitarité de l'opérateur U (T).

Dans le cas où l'état initial et l'état final sont deux états d'une même particule et où l'opérateur tensoriel est hermitique,

$$\underset{r}{\underline{A}}{}^{+} = \underset{r}{\underline{A}} \quad , \tag{20}$$

l'hermiticité de l'opérateur implique la condition suivante sur ses fonctions de vertex standard,

$$\underset{r}{\underline{A}}(p_2,p_1,\{e\})^{n_2}{}_{n_1} = \underset{r}{\underline{A}}(p_1,p_2,\{e\})^{n_1}{}_{n_2}{}^{*} \quad , \tag{21}$$

où l'on a remplacé $\underline{p}_1$ par $\underline{p}_2$ et vice-versa dans le second membre.

9.4-Paramétrisation des fonctions de vertex standard

Les fonctions de vertex standard dépendent de la tétrade de référence. Considérons les choix de référentiels présentant un intérêt physique. Quelle que soit la valeur de $\underline{q}^2$ où $\underline{q} = \underline{p}_2 - \underline{p}_1$, on peut choisir $\underline{e} = \hat{\underline{p}}_1$ ou $\underline{e} = \hat{\underline{p}}_2$. Ces deux possibilités correspondent au système où la particule 1 ou 2 est au repos. En outre on peut considérer deux autres systèmes selon la valeur de $\underline{q}^2$. Si $\underline{q}^2$ est positif on définit le système du centre de masse C caractérisé par le choix $\underline{e} = \underline{e}_C$,

$$\underline{e}_C = \alpha\, \underline{q}/\sqrt{\underline{q}^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = q^\circ/|q^\circ| \quad , \tag{22}$$

tandis que si $\underline{q}^2$ est négatif, on définit le système de Breit ou système du mur de briques B caractérisé par le quadrivecteur de genre temps $\underline{e}_B$, situé dans le 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$ et orthogonal au transfert $\underline{q}$,

$$\underline{e}_B = N/\sqrt{-q^2}\ \{-,q|\hat{p}_1,\hat{p}_2\} \tag{23}$$

où la constante N et la notation $\{-,a|b,c\}$ sont définies en (8-6 et 7).

Dans ces quatre cas le quadrivecteur $\underline{e}$ de genre temps des tétrades de référence est dans le 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$ ce que nous supposerons toujours réalisé dans la suite,

$$\underline{e} \in (\underline{p}_1, \underline{p}_2) \tag{24}$$

Pour obtenir une base orthonormée du 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$, nous construisons un quadrivecteur $\underline{u}$ unitaire de genre espace, orthogonal à $\underline{e}$, ($\underline{u}^2 = -1$, $\underline{u}.\underline{e} = 0$), par, cf.Eq.(8-8)

$$\underline{u} = N\ \{-,e|\hat{p}_1,\hat{p}_2\} \tag{25}$$

Notons que le quadrivecteur $\underline{u}$ ne dépend que du 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$ et de la position du quadrivecteur $\underline{e}$ dans ce 2-plan, en particulier il ne dépend pas de la position relative des quadrivecteurs $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_2$ dans le 2-plan.

Quand la tétrade de référence est choisie, les fonctions de vertex standard ne dépendent plus que des impulsions $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_2$ dont les carrés sont donnés, $\underline{p}_1^2 = M_1^2$, $\underline{p}_2^2 = M_2^2$. Les quadrivecteurs $\underline{e}$ et $\underline{u}$ définissent le 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$. La position relative des quadrivecteurs $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_2$ dans ce 2-plan est donnée par l'invariant $\underline{q}^2$

$$\underline{q}^2 = M_1^2 + M_2^2 - 2\,\underline{p}_1\cdot\underline{p}_2 \quad . \tag{26}$$

On peut donc paramétrer les fonctions de vertex standard dans une tétrade de référence $\{e\}$ par l'invariant $\underline{q}^2$ et le quadrivecteur $\underline{u}$

$$\underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{n_2}{}_{n_1} = \underline{r}^{A}\,(p_2,p_1,\{e\})^{n_2}{}_{n_1} \quad . \tag{27}$$

Cette paramétrisation est possible quand les quadrivecteurs $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_2$ définissent un 2-plan, i.e. $\underline{p}_1 \neq \lambda\,\underline{p}_2$. Remarquons aussi que cette paramétrisation est valable quelle que soit la valeur de $\underline{q}^2$ et même pour $\underline{q}^2 = 0$ si les masses sont différentes ($M_1 \neq M_2$). C'est pourquoi nous n'avons pas à considérer deux paramétrisations différentes pour $\underline{q}^2 > 0$ et pour $\underline{q}^2 < 0$ comme ce fut le cas pour De Rafael, [Ra.66].

Considérons une nouvelle tétrade de référence $\Lambda\{e\}$. La convention (24) impose au quadrivecteur $\underline{\Lambda e}$ d'appartenir au 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$, ce qui implique des contraintes sur la transformation de Lorentz Λ considérée. Ecrivons la décomposition canonique de Λ définie en (5-61)

$$\Lambda = L_\Lambda\, R_\Lambda \tag{28}$$

Pour que le quadrivecteur $\underline{\Lambda e}$ reste dans le 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$, il faut que la transformation pure L_Λ agisse uniquement dans ce 2-plan et dorénavant nous supposerons toujours cette condition réalisée.

Dans la nouvelle tétrade $\Lambda\{e\}$, les fonctions de vertex standard peuvent être paramétrées par l'invariant $\underline{q}^2$ et par le quadrivecteur $\underline{u}^\Lambda$ situé dans le 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$ et orthogonal à $\underline{\Lambda e}$

$$\underline{u}^\Lambda = N\,\{-,\Lambda e|\hat{p}_1,\hat{p}_2\} \quad . \tag{29}$$

En utilisant l'identité $\underline{\Lambda e} = L_\Lambda \underline{e}$ et le fait que le quadrivecteur $\underline{u}^\Lambda$ ne dépende pas des positions de $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_2$ dans le 2-plan, on obtient l'identité

$$\underline{u}^\Lambda = N,\ \{-,L_\Lambda e|L_\Lambda\hat{p}_1,L_\Lambda\hat{p}_2\} = L_\Lambda \underline{u} \quad . \tag{30}$$

Avec ces notations la loi de transformation (16) des fonctions de vertex standard s'écrit

$$\underline{r}^{A}(q^2,L_\Lambda u,\Lambda\{e\})^{m_2}{}_{m_1} = D^{s_2}(R_\Lambda^{-1})^{m_2}{}_{n_2}\ \underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{n_2}{}_{n_1}\ D^{s_1}(R_\Lambda)^{n_1}{}_{m_1} \quad . \tag{31}$$

Dans le cas où Λ est la transformation pure L, la rotation R_Λ devient l'identité et la relation (31) s'écrit

$$\underline{r}^{A}(q^2,Lu,L\{e\})^{m_2}{}_{m_1} = \underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{m_2}{}_{m_1} \quad , \tag{32}$$

i.e., les fonctions de vertex standard ne sont pas modifiées dans un changement de tétrade de référence par transformation de Lorentz pure.

9.5-Fonctions de vertex réduites

Les coefficients-CG permettent de réduire le produit tensoriel des matrices de rotation intervenant dans la loi de transformation des fonctions de vertex standard (31). A l'aide de l'équation (2-26), on obtient

$$\langle s_1 m_1 LM | s_2 m_2 \rangle \; \underline{r}^{A}(q^2,L_\Lambda u,\Lambda\{e\})^{m_2}{}_{m_1} = D^{L}(R_\Lambda^{-1})^{M}{}_{N} \langle s_1 n_1 LN | s_2 n_2 \rangle \; \underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{n_2}{}_{n_1} \quad . \tag{33}$$

Les fonctions définies par

$$\underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{L\,*}_{N} = \frac{2L+1}{2s_2+1} \langle LNs_1 n_1 | s_2 n_2 \rangle \; \underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{n_2}{}_{n_1} \quad , \tag{34}$$

$$\underline{r}^{A}(q^2,L_\Lambda u,\Lambda\{e\})^{L\,*}_{M} = \frac{2L+1}{2s_2+1} \langle LMs_1 m_1 | s_2 m_2 \rangle \; \underline{r}^{A}(q^2,L_\Lambda u,\Lambda\{e\})^{m_2}{}_{m_1} \tag{35}$$

se transforment suivant la loi

$$\underline{r}^{A}(q^2,L_\Lambda u,\Lambda\{e\})^{L}_{M} = \underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{L}_{N} \; D^{L}(R_\Lambda)^{N}{}_{M} \quad , \tag{36}$$

c'est pourquoi elles sont appelées fonctions de vertex réduites. Si Λ est une rotation R du petit groupe de $\underline{e}$, la transformation de Lorentz pure L_Λ est égale à l'identité, tandis que si Λ est une transformation pure L c'est la rotation R_Λ qui devient l'identité. Dans ces deux cas la relation (36) devient

$$\underline{r}^{A}(q^2,u,R\{e\})^{L}_{M} = \underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{L}_{N} \; D^{L}(R)^{N}{}_{M} \quad , \tag{37}$$

$$\underline{r}^{A}(q^2,Lu,L\{e\})^{L}_{M} = \underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{L}_{M} \quad . \tag{38}$$

Dans le second cas les fonctions de vertex réduites sont inchangées.

En utilisant l'orthogonalité et les propriétés des coefficients-CG on peut inverser les définitions (34) et (35) des fonctions de vertex réduites, on obtient

$$\underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{n_2}_{\ n_1} = \sum_{LN} \langle s_2 n_2 | LN s_1 n_1 \rangle \ \underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{L\,*}_{N} \qquad (39)$$

$$\underline{r}^{A}(q^2,L_\Lambda u,\Lambda\{e\})^{m_2}_{\ m_1} = \sum_{LM} \langle s_2 m_2 | LM s_1 m_1 \rangle \ \underline{r}^{A}(q^2,L_\Lambda u,\Lambda\{e\})^{L\,*}_{M} \qquad (40)$$

où la sommation sur L est finie : $|s_1-s_2| \leqslant L \leqslant s_1 + s_2$.

Pour les plus petites valeurs du spin initial, à savoir $s_1 = 0$ pour les bosons et $s_1 = ½$ pour les fermions, nous pouvons effectuer la sommation sur L et calculer explicitement les coefficients-CG de la relation (39), on obtient

Bosons : $s_1 = 0$

$$\underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{n_2} = \underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{s_2\,*}_{n_2} \qquad (41)$$

Fermions : $s_1 = ½$

$$\underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{n_2}_{\pm ½} = \Big[\mp \sqrt{\frac{s_2+1\mp n_2}{2s_2+2}}\ \underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{s_2+½\,*}_{n_2\mp ½} + \sqrt{\frac{s_2 \pm n_2}{2s_2}}\ \underline{r}^{A}(q^2,u,\{e\})^{s_2-½\,*}_{n_2\mp ½} \Big] \qquad (42)$$

9.6-Remarques

i) Les transformations de Lorentz du 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$ sont pures et forment un groupe, voir équation (9-33). C'est pourquoi quand le quadrivecteur $\underline{e}$ est dans le 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$ les tétrades $\{p_1\}_e$, $\{p_2\}_e$ et $\{e\}$ sont deux à deux conjuguées. En effet on a

$$\{p_1\}_e = L(p_1 \longleftarrow e)\{e\} \quad , \quad \{p_2\}_e = L(p_2 \longleftarrow e)\{e\} \qquad (43)$$

d'où on déduit

$$\{p_2\}_e = L(p_2 \longleftarrow e)L^{-1}(p_1 \longleftarrow e)\ \{p_1\}_e = L(p_2 \longleftarrow p_1)\ \{e\} \qquad (44)$$

Il en est de même des tétrades $\{p_1\}^{\Lambda}_{e}$, $\{p_2\}^{\Lambda}_{e}$ et $\Lambda\{e\}$.

ii) Si le troisième axe de genre temps de la tétrade de référence est choisi égal au quadrivecteur $\underline{u}$, les tétrades correspondantes $\{p_i\}$ sont des tétrades d'hélicité, cf.Eq.(8-5). En effet soit $\underline{n}_{(i)3}$ l'axe de quantification des tétrades $\{p_i\}_e$, si on choisit $\underline{e}_3 = \underline{u}$ la relation (8-10) implique

$$\underline{n}_{(i)3} = L(p_i)\ \underline{e}_3 = L(p_i)\underline{u} = \underline{h}_i \qquad (45)$$

où les $\underline{h}_i$ sont les axes d'hélicité définis en (8-5).

iii) Nous avons vu que les transformations de Lorentz pures pouvaient être paramétrées par un argument χ, cf.Eq.(5-37). Dans le tableau suivant nous donnons les valeurs explicites de ch χ et de sh χ pour les transformations pures qui relient les référentiels définis au §9-4.

Transformation	ch χ	sh χ
$L(\hat{p}_2 \leftarrow \hat{p}_1)$	$\hat{\underline{p}}_1 \cdot \hat{\underline{p}}_2$	$- N$
$L(e_C \leftarrow \hat{p}_1)$	$\lvert \hat{\underline{q}} \cdot \hat{\underline{p}}_1 \rvert$	$- M_2 \dfrac{N}{\sqrt{\underline{q}^2}}$
$L(e_C \leftarrow \hat{p}_2)$	$\lvert \hat{\underline{q}} \cdot \hat{\underline{p}}_2 \rvert$	$- M_1 \dfrac{N}{\sqrt{\underline{q}^2}}$
$L(e_B \leftarrow \hat{p}_1)$	$M_2 \dfrac{N}{\sqrt{-\underline{q}^2}}$	$\hat{\underline{q}} \cdot \hat{\underline{p}}_1$
$L(e_B \leftarrow \hat{p}_2)$	$M_1 \dfrac{N}{\sqrt{-\underline{q}^2}}$	$- \hat{\underline{q}} \cdot \hat{\underline{p}}_2$

(46)

où l'on a posé

$$\hat{\underline{q}} = \underline{q} / \sqrt{\lvert \underline{q}^2 \rvert} \quad , \qquad (47)$$

les quadrivecteurs $\underline{e}_C$ et $\underline{e}_B$ et l'invariant N étant respectivement définis en (22) et (23) et (8-7).

Enfin à l'aide des relations (23) et (25) on démontre l'identité

$$\underline{u}_B \equiv N\ \{-, e_B \mid \hat{p}_1, \hat{p}_2\} = \underline{q} / \sqrt{-\underline{q}^2} \quad . \qquad (48)$$

10 - DEVELOPPEMENT DES FONCTIONS DE VERTEX EN FACTEURS DE FORME

Les facteurs de forme sont les coefficients du développement des fonctions de vertex réduites sur les harmoniques sphériques tensorielles. Notre développement est du même type que celui de De Rafael [Ra.66] dont nous retrouvons les résultats, mais il est effectué dans un référentiel arbitraire. Nous montrons que les facteurs de forme, invariants pour les

rotations du petit groupe du quadrivecteur de genre temps de la tétrade de référence, dépendent du choix de ce quadrivecteur dans le 2-plan des quadrivecteurs $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$. Ensuite nous établissons les règles de sélection sur ces facteurs de forme, résultant de la conservation de la parité, de l'invariance par renversement du temps et de l'hermiticité de l'opérateur dans le cas des particules identiques.

10.1-Facteurs de forme

La loi de transformation par rotation, des fonctions de vertex réduites (9-37), est identique à celle des harmoniques sphériques tensorielles, cf.Eq.(6-38). C'est pourquoi les fonctions ${}_r\underline{A}(q^2,u,\{e\})^L_M$ peuvent être développées sur cette base

$$ {}_r\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{L\,*}_M = \sum_{\ell\ell_r..\ell_2} \sum_{j_1..j_r} F(q^2,\underline{e})^{\ell\ell_r..j_rL}\ {}_r\underline{Y}^{\ell\ell_r..j_r}(u,\{e\})^{L\,*}_M \qquad (1) $$

avec des coefficients $F(q^2,\underline{e})^{\ell\ell_r..j_rL}$ invariants par rotation de la tétrade de référence. Ces coefficients appelés facteurs de forme des fonctions de vertex ne dépendent plus que de l'invariant $\underline{q}^2$ et du choix du quadrivecteur $\underline{e}$ dans le 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$.

Comme les harmoniques sphériques tensorielles, les facteurs de forme n'ont pas de bonnes propriétés dans une transformation de Lorentz pure de la tétrade de référence. Dans la suite nous définirons de nouveaux facteurs de forme qui ont de meilleures propriétés pour ces transformations.

Dans cette section, nous supposons dorénavant que le quadrivecteur $\underline{e}$ est fixé et nous l'omettrons dans la notation, sauf dans la relation (2) inverse de la relation (1) qui s'obtient à l'aide de la relation d'orthonormalité (6-26) des harmoniques sphériques tensorielles

$$ F(q^2,e)^{\ell\ell_r j_r L} = (-1)^j \int {}_r\underline{Y}^{\ell\ell_r j_r}(u,\{e\})^L_M(r)\ {}_r\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{L\,*}_M\, d\Omega(u,\{e\}). \qquad (2) $$

En multipliant scalairement la définition (1) par un tenseur de base sphérique, cf.Eq.(6-10b), on construit les composantes sphériques

des fonctions de vertex réduites et on obtient le développement de ces composantes sur les harmoniques scalaires en fonction des facteurs de forme

$$\left[A(q^2,u)^{L\ *}_{M}\right]^{\ell_r\, j_r}_{n} = \sum_{\ell m} \langle LM|\ell m \ell_r n\rangle\, F(q^2)^{\ell\ell_r\, j_r\, L}\, Y^{\ell}_{m}(u)^{\ *} \qquad (3)$$

Les relations (9-39), (1) et (3) permettent d'obtenir les développements en facteurs de forme des fonctions de vertex standard

$$\underset{r}{A}(q^2,u)^{n_2}_{n_1} = \sum_{L\ell}\sum_{\ell_r\, j_r} \langle s_2 n_2|LMs_1 n_1\rangle\, F(q^2)^{\ell\ell_r\, j_r\, L}\ \underset{r}{Y}^{\ell\ell_r\, j_r}(u)^{L\ *}_{M} \qquad (4)$$

et de leurs composantes sphériques

$$\left[A(q^2,u)^{n_2}_{n_1}\right]^{\ell_r\, j_r}_{n} = \sum_{L\ell m} \langle s_2 n_2|LMs_1 n_1\rangle\langle LM|\ell m \ell_r n\rangle\, F(q^2)^{\ell\ell_r\, j_r\, L}\, Y^{\ell}_{m}(u)^{\ *} \qquad (5$$

Cette expression est une généralisation du développement obtenu par De Rafael, à des tenseurs d'ordre quelconque et pour n'importe quelle valeur de $\underline{q}^2$. En nous plaçant successivement dans les systèmes du centre de masse C et de Breit B, cf.Eq. (9-23,24), nous pouvons relier nos facteurs de forme à cause de De Rafael dans le cas d'un opérateur quadrivectoriel. On obtient

$$F(q^2,\underline{e}_C)^{LoL} = (-1)^{2s_2+L}\sqrt{\frac{4\pi}{2s_2+1}}\ A^{(L)}(q^2) \qquad (6a)$$

$$F(q^2,\underline{e}_C)^{\ell 1L} = (-1)^{2s_2+\ell+1}\sqrt{\frac{4\pi}{2s_2+1}}\ F^{(\ell,L)}(q^2) \qquad (6b)$$

$$F(q^2,\underline{e}_B)^{LoL} = (-1)^{2s_2+L}\sqrt{\frac{4\pi}{2s_2+1}}\ E^{(L)}(q^2) \qquad (7a)$$

$$F(q^2,\underline{e}_B)^{\ell 1L} = (-1)^{2s_2+\ell+1}\sqrt{\frac{4\pi}{2s_2+1}}\ H^{(\ell,L)}(q^2) \qquad (7b)$$

où les facteurs de forme $A^{(L)}(q^2)$, $H^{(L)}(q^2)$, $F^{(\ell,L)}(q^2)$, $H^{(\ell,L)}(q^2)$ sont définis par les équations (4-28) et (4-29) de l'article de De Rafael.

10.2-Quantification en hélicité

Quand on quantifie en hélicité, cf.Eq.(9-45), on choisit comme troisième axe de genre espace le quadrivecteur $\underline{u}$ lui-même. Il en résulte que la dépendance en $\underline{u}$ disparait dans les harmoniques sphériques. On a

$$Y^{\ell}_{m}(e_3,\{e\}) = \delta_{m\,o}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \qquad (8)$$

et dans ce cas, la relation (3) devient

$$\left[A(q^2,e_3)^{L\,*}_{M}\right]^{\ell_r\,j_r}_{n} = \sum_{\ell} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \langle LM|\ell 0 \ell_r n\rangle\, F(q^2)^{\ell \ell_r\, j_r\, L} \quad . \qquad (9)$$

Les seules composantes non nulles sont telles que M = n, et pour ces composantes l'indice M sera omis

$$\left[A(q^2,e_3)^{L\,*}\right]^{\ell_r\,j_r}_{n} \equiv \left[A(q^2,e_3)^{L\,*}_{n}\right]^{\ell_r\,j_r}_{n} \qquad (10)$$

En hélicité, l'équation (5) devient

$$\left[A(q^2,e_3)^{n_2}_{\ n_1}\right]^{\ell_r\,j_r}_{n} = \sum_{L\ell} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \langle s_2 n_2|Lns_1 n_1\rangle\langle Ln|\ell 0 \ell_r n\rangle\, F(q^2)^{\ell \ell_r\, j_r\, L} \qquad (11)$$

Cette équation montre que les seules fonctions $\left[A(q^2,e_3)^{n_2}_{\ n_1}\right]^{\ell_r\,j_r}_{n}$ a priori non nulles sont telles que $n = n_2 - n_1$. Ce résultat est donné par Durand, De Celles et Marr, [D.D.M.62] pour des fonctions scalaires ou quadrivectorielles dans le système de Breit.

En hélicité, les composantes sphériques des fonctions standard s'expriment à l'aide des composantes des fonctions réduites sous la forme

$$\left[A(q^2,e_3)^{n_2}_{\ n_1}\right]^{\ell_r\,j_r}_{n} = \sum_{L} \langle s_2 n_2|Lns_1 n_1\rangle \left[A(q^2,e_3)^{L\,*}\right]^{\ell_r\,j_r}_{n} \qquad (12)$$

Pour les plus petites valeurs des spins initiaux, à savoir $s_1 = 0$ pour les bosons et $s_1 = \frac{1}{2}$ pour les fermions, nous pouvons effectuer la sommation sur L. En utilisant les coefficients-CG calculés en (9-40,41), on obtient

Bosons : $s_1 = 0$

$$\left[A(q^2,e_3)^{n_2}\right]^{\ell_r\,j_r}_{n_2} = \left[A(q^2,e_3)^{s_2\,*}\right]^{\ell_r\,j_r}_{n_2} \qquad (13)$$

Fermions : $s_1 = \frac{1}{2}$

$$\left[A(q^2,e_3)^{n_2}_{\ \pm\frac{1}{2}}\right]^{\ell_r\,j_r}_{n_2\,\mp\frac{1}{2}} = \left\{ \mp \sqrt{\frac{s_2+1\mp n_2}{2s_2+2}} \left[A(q^2,e_3)^{s_2+\frac{1}{2}\,*}\right]^{\ell_r\,j_r}_{n_2\,\mp\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{s_2\pm n_2}{2s_2}} \left[A(q^2,e_3)^{s_2-\frac{1}{2}\,*}\right]^{\ell_r\,j_r}_{n_2\,\mp\frac{1}{2}} \right\} \qquad (14)$$

10.3-Règles de sélection dues à la parité

Si l'opérateur $\underline{A}_r$ a une parité donnée ϵ nous avons vu, Eq.(9-18) que les fonctions de vertex standard satisfont la relation

$$\underline{A}_r(p_2,p_1,\{e\})^{n_2}_{n_1} = \epsilon\epsilon_1\epsilon_2 \ (\overset{r}{\otimes} P) \ \underline{A}_r(Pp_1,Pp_2,\{e\})^{n_2}_{n_1} \ . \tag{15}$$

Les fonctions de vertex $\underline{A}_r(Pp_1,Pp_2,\{e\})^{n_2}_{n_1}$ peuvent toujours être paramétrées par l'invariant $q^2 = (Pp_2-Pp_1)^2 = (p_2 - p_1)^2$ et par le quadrivecteur u^P défini par

$$u^P = N\{-, e|P\hat{p}_1,P\hat{p}_2\} \ . \tag{16}$$

En utilisant l'identité $P\,e = e$, on en déduit

$$u = u^P = P\,u \ , \tag{17}$$

et on peut donc écrire la relation (15) sous la forme

$$\underline{A}_r(q^2,u,\{e\})^{n_2}_{n_1} = \epsilon\epsilon_1\epsilon_2 \ (\overset{r}{\otimes} P) \ \underline{A}_r(q^2,Pu,\{e\})^{n_2}_{n_1} \ . \tag{18}$$

Le développement (7) et l'orthogonalité des coefficients-CG permettent d'obtenir la relation

$$\sum_{\ell\ell_r\cdots\ell_2} \ \sum_{j_1\cdots j_r} F(q^2)^{\ell\ell_r j_r L} \ \underline{Y}_r^{\ell\ell_r j_r}(u,\{e\})^{L\,*}_M$$

$$= \epsilon\epsilon_1\epsilon_2 \sum_{\ell\ell_r'\cdots\ell_2'} \ \sum_{j_1'\cdots j_r'} F(q^2)^{\ell'\ell_r' j_r' L} \ (\overset{r}{\otimes} P) \ \underline{Y}_r^{\ell'\ell_r' j_r'}(Pu,\{e\})^{L\,*}_M \tag{19}$$

A l'aide des équations (6-9,34), on déduit de (19) la règle de sélection suivante sur les facteurs de forme

$$\boxed{F(q^2)^{\ell\ell_r j_r L} = (-1)^{\ell+j}\,\epsilon\epsilon_1\epsilon_2\,F(q^2)^{\ell\ell_r j_r L}} \tag{20}$$

En reportant cette règle de sélection sur les facteurs de forme dans les équations (9) et (12) on déduit des règles de sélection sur les composantes sphériques des fonctions de vertex réduites en hélicité

$$[A(q^2,e_3)^L]^{\ell_r j_r}_{m_r} = (-1)^{j+\ell_r+L}\,\epsilon\epsilon_1\epsilon_2\,[A(q^2,e_3)^L]^{\ell_r j_r}_{-m_r} \ , \tag{21}$$

et sur les composantes sphériques des fonctions de vertex standard en hélicité

$$[A(q^2,e_3)^{n_2}_{n_1}]^{\ell_r j_r}_{m_r} = (-1)^{j+\ell_r+s_2-s_1}\,\epsilon\epsilon_1\epsilon_2[A(q^2,e_3)^{-n_2}_{-n_1}]^{\ell_r j_r}_{-m_r} \tag{22}$$

10.4-Règles de sélection dues au renversement du temps

Comme nous l'avons vu en (9-19), l'invariance par renversement du temps impose aux fonctions de vertex standard la condition

$$ {}_r\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{n_2}{}_{n_1} = \epsilon_T\,(-1)^{s_1-s_2+n_1-n_2}\,(\overset{r}{\otimes} T)\;{}_r\underline{A}(q^2,Pu,\{e\})^{-n_2}{}_{-n_1}{}^{*} \qquad (23) $$

A l'aide du développement (7), on obtient l'expression

$$ \sum_{L\ell}\sum_{\ell_r..\ell_2}\sum_{j_1..j_r} \langle s_2 n_2 LM | s_1 n_1\rangle F(q^2)^{\ell\ell_r..j_r L}\;{}_r\underline{Y}^{\ell\ell_r..j_r}(\underline{u})^{L}_{M}{}^{*} \cdot $$

$$ \epsilon_T(-1)^{s_1-s_2+n_1-n_2}\sum_{L\ell'}\sum_{\ell_r'..\ell_2'}\sum_{j_1'..j_r'} \langle s_2 -n_2 L'M' | s_1 -n_1\rangle F(q^2)^{\ell'\ell_r'..j_r'L'}{}^{*} $$

$$ (\overset{r}{\otimes} T)\;{}_r\underline{Y}^{\ell'\ell_r'..j_r'}(P\underline{u})^{L'}_{M'} \cdot \qquad (24) $$

En remarquant que T = -P, et en utilisant les identités (6-9,27,34) et les propriétés des coefficients-CG, on obtient la règle de sélection suivante sur les facteurs de forme

$$ \boxed{F(q^2)^{\ell\ell_r j_r L} = (-1)^r\,\epsilon_T\,F(q^2)^{\ell\ell_r j_r L}{}^{*}} \qquad (25) $$

Cette relation implique que les facteurs de forme sont réels si $\epsilon_T = (-1)^r$ et imaginaires si $\epsilon_T = -(-)^r$. En hélicité les composantes sphériques des fonctions de vertex standard et réduites sont des combinaisons linéaires réelles des facteurs de forme, cf.Eq.(9,11), il en résulte que ces composantes sont également réelles ou imaginaires.

10.5-Cas des particules identiques

Nous avons vu que dans le cas particulier où l'état initial et l'état final sont deux états d'une particule de spin s et où l'opérateur tensoriel est hermitique, les fonctions de vertex standard satisfont la condition, cf.Eq.(9-20),

$$ {}_r\underline{A}(p_2,p_1,\{e\})^{n_2}{}_{n_1} = {}_r\underline{A}(p_1,p_2,\{e\})^{n_1}{}_{n_2}{}^{*} \qquad (26) $$

La fonction de vertex ${}_r\underline{A}(p_1,p_2,\{e\})^{n_1}{}_{n_2}$ peut être paramétrée par l'invariant q^2 et par le quadrivecteur $\underline{u}'$ défini par

$$ \underline{u}' = N\{-, e|\hat{p}_2,\hat{p}_1\} = -\underline{u}\ , \qquad (27) $$

car le symbole $\{-, e|\hat{p}_1,\hat{p}_2\}$ est antisymétrique dans l'échange des

quadrivecteurs $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_2$. La relation (26) s'écrit donc

$$ {}_r\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{n_2}{}_{n_1} = {}_r\underline{A}(q^2,-u,\{e\})^{n_1}{}_{n_2}{}^{*} \quad , \tag{28} $$

et en développant chacun des membres de cette équation selon (7), on obtient l'expression

$$ \sum_{L\ell} \sum_{\ell_r..\ell_2} \sum_{j_1..j_r} <sn_2 LM|sn_1> F(q^2)^{\ell\ell_r j_r L}\ {}_r\underline{Y}^{\ell\ell_r j_r}(\underline{u})^{L\,*}_{M} = $$

$$ \sum_{L'\ell'} \sum_{\ell_r'..\ell_2'} \sum_{j_1'..j_r'} <sn_1 L'M'|sn_2> F(q^2)^{\ell'\ell_r' j_r' L'\,*}\ {}_r\underline{Y}^{\ell'\ell_r' j_r'}(-\underline{u})^{L'}_{M'} \quad . \tag{29} $$

Des identités (6-27,28) et des propriétés de symétrie des coefficients-CG, on déduit la règle de sélection suivante sur les facteurs de forme

$$ \boxed{F(q^2)^{\ell\ell_r j_r L} = (-1)^{L+j}\ F(q^2)^{\ell\ell_r j_r L\,*}} \tag{30} $$

En combinant la conservation de la parité, l'invariance par renversement du temps et l'hermiticité de l'opérateur, on obtient la nouvelle règle de sélection

$$ \boxed{F(q^2)^{\ell\ell_r j_r L} = (-1)^{L+\ell+r}\ \epsilon\epsilon_T\ F(q^2)^{\ell\ell_r j_r L}} \tag{31} $$

En portant cette expression dans les équations (9) et (11) on déduit des règles de sélection sur les composantes sphériques des fonctions de vertex réduites en hélicité,

$$ [A(q^2,e_3)^L]^{\ell_r j_r}_{m_r} = (-1)^{r+\ell_r}\ \epsilon\epsilon_T\ [A(q^2,e_3)^L]^{\ell_r j_r}_{-m_r} \quad , \tag{32} $$

et sur les composantes sphériques des fonctions de vertex standard en hélicité

$$ [A(q^2,e_3)^{n_2}{}_{n_1}]^{\ell_r j_r}_{m_r} = (-1)^{r+\ell_r+m_r}\ \epsilon\epsilon_T\ [A(q^2,e_3)^{n_1}{}_{n_2}]^{\ell_r j_r}_{-m_r} \tag{33} $$

Dans le cas particulier d'opérateurs quadrivectoriels, $r = 1$, $\ell_1 = j_1$, on a les conditions suivantes

$$ [A(q^2,e_3)^n{}_n]^0_0 = 0 \quad \text{si } \epsilon\epsilon_T = +1 \quad , \tag{34} $$

$$ [A(q^2,e_3)^n{}_n]^1_0 = 0 \quad \text{si } \epsilon\epsilon_T = -1 \quad . \tag{35} $$

11 - DEVELOPPEMENT MULTIPOLAIRE DES FONCTIONS DE VERTEX

Au lieu d'utiliser la base des harmoniques sphériques tensorielles, nous pouvons décomposer les fonctions de vertex réduites sur la base des multipoles tensoriels qui ont de meilleures propriétés géométriques, voir §7-1. Les coefficients de ce développement sont les facteurs de forme multipolaires. Comme les facteurs de forme définis à la section précédente, ils n'ont pas de bonnes propriétés pour les transformations de Lorentz pures. C'est pourquoi, pour remédier à cette situation nous développons les fonctions de vertex sur la base des multipoles tensoriels irréductibles définis en §7-3 et construits explicitement en 7-4 pour les quadrivecteurs et 7-5 pour les tenseurs d'ordre 2. Ainsi nous définissons les facteurs de forme multipolaires irréductibles qui se transforment par couples selon une représentation B des transformations de Lorentz pures. Ensuite nous étudions les règles de sélection sur ces coefficients résultant de la conservation du courant vectoriel ou de diverses contraintes sur l'opérateur tensoriel d'ordre 2.

11.1-Facteurs de forme multipolaires

Les fonctions réduites ${}_r\underline{A}(q^2,u,\{e\})^L_M$, définies en (9-35) ont la même loi de transformation par rotation que les multipoles tensoriels ${}_r\underline{X}^{\ell_r j_r}_{\mu}(\underline{u},\{e\})^L_M$, cf.Eq.(7-21) et (9-37). Elles peuvent donc être décomposées sur cette base avec des coefficients invariants par rotation

$$ {}_r\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{L\,*}_M = \sum_{\mu \ell_r \cdots j_r} \sum_{j_1 \cdots j_r} G(q^2,e)^{\ell_r\, j_r\, L}_{\mu}\ {}_r\underline{X}^{\ell_r\, j_r\, L}_{\mu}(u,\{e\})^{L\,*}_M \qquad (1) $$

Les coefficients $G(q^2,e)^{\ell_r\, j_r\, L}_{\mu}$ sont appelés les facteurs de forme multipolaires des fonctions de vertex. Ce sont des combinaisons linéaires orthonormées des facteurs de forme définis dans la section précédente. En effet en utilisant la relation d'orthonormalité (7-2) des multipoles, on peut inverser la relation (1), on obtient

$$ G(q^2,e)^{\ell_r\, j_r\, L}_{\mu} = (-1)^j \int {}_r\underline{X}^{\ell_r\, j_r}_{\mu}(\underline{u},\{e\})^L_M(\overset{r}{\cdot})\ {}_r\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{L\,*}_M\, d\Omega(\underline{u},\{e\}) \qquad (2) $$

La définition des multipoles tensoriels (7-1) et l'équation (10-1) conduisent aux relations

$$G(q^2,e)_{o}^{\ell_r j_r L} = \sum_{\ell} \langle \ell 0 | \ell_r 0 L 0 \rangle \, F(q^2,e)^{\ell \ell_r j_r L} \qquad (3a)$$

$$G(q^2,e)_{\pm\mu}^{\ell_r j_r L} = \sum_{\ell} \frac{1 \pm (-1)^{L+\ell}}{\sqrt{2}} \langle \ell 0 | \ell_r \mu L - \mu \rangle \, F(q^2,e)^{\ell \ell_r j_r L} \qquad (3b)$$

Ces facteurs de forme multipolaires ont donc les mêmes propriétés que les facteurs de forme. Ils sont invariants par rotation de la tétrade de référence et ils ne dépendent plus que de l'invariant $\underline{q}^2$ et du choix du quadrivecteur $\underline{e}$, mais ils n'ont pas de bonnes propriétés pour les transformations de Lorentz pures. Dans ce paragraphe et le prochain nous supposons que $\underline{e}$ est fixé tandis que dans les suivants nous étudions l'influence de sa position dans le 2-plan $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$.

En multipliant scalairement la relation (1) par un tenseur de la base sphérique, on déduit le développement multipolaire des composantes sphériques des fonctions de vertex réduites sur les harmoniques scalaires. Ce développement peut se mettre sous la forme

$$\left[A(q^2,u)_{M}^{L\,*}\right]_{n}^{\ell_r j_r} = \sum_{\mu \geq 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\delta_{\mu 0}} \sum_{\ell' m'} \langle \ell 0 | \ell_r \mu L - \mu \rangle \langle LM | \ell m \ell_r n \rangle \qquad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(G(q^2)_{\mu}^{\ell_r j_r L} + G(q^2)_{-\mu}^{\ell_r j_r L}) + (-1)^{L+\ell} (G(q^2)_{\mu}^{\ell_r j_r L} - G(q^2)_{-\mu}^{\ell_r j_r L}) \right] Y_m^{\ell}(u)^{*}$$

Si on quantifie en hélicité, $\underline{u} = e_3$, cf.Eq.(9-45), la dépendance en $\underline{u}$ disparait dans l'expression précédente, cf.Eq.(10-4), et en utilisant l'orthogonalité des coefficients-CG, on peut effectuer les sommations sur ℓ, μ et M. Il vient alors

$$\left[A(q^2,e_3)^{L\,*}\right]_{n}^{\ell_r j_r} = (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\delta_{n0}} \sqrt{\frac{2L+1}{8\pi}} \left[\theta(n)(G(q^2)_{n}^{\ell_r j_r L} - G(q^2)_{-n}^{\ell_r j_r L}) \right.$$

$$\left. + (-1)^{\ell_r} \theta(-n)(G(q^2)_{-n}^{\ell_r j_r L} + G(q^2)_{n}^{\ell_r j_r L}) \right] \qquad (5)$$

où la fonction échelon unité, θ, est définie par

$$\theta(x) = 0 \text{ pour } x < 0 \quad \text{et} \quad \theta(x) = 1 \text{ pour } x \geq 0 \,. \qquad (6)$$

Le développement multipolaire (5) est plus simple que la

décomposition en facteurs de forme correspondante (9-9) car il n'y a plus aucune sommation à effectuer.

En utilisant les équations (9-39) et (11-1), nous obtenons le développement multipolaire des fonctions de vertex standard

$$\underline{\underline{r}}^{A}(q^2,u,\{e\})^{n_2}_{n_1} = \sum_L \langle s_2 n_2 | LM s_1 n_1 \rangle \sum_{\mu \ell_r .. j_r} G(q^2)^{\ell_r j_r L}_{\mu} \; \underline{\underline{r}}^{X^{\ell_r j_r}}_{\mu}(u,\{e\})^{L}_{M} \; ^{*} \qquad (7)$$

11.2-Règles de sélection sur les facteurs de forme multipolaires

Les facteurs de forme multipolaires étant des combinaisons linéaires des facteurs de forme, cf.Eq.(3), ils satisfont donc des règles de sélection analogues à celles établies dans la section précédente.

L'équation (10-20) donne les règles de sélection sur les facteurs de forme multipolaires résultant de la conservation de la parité

$$\boxed{G(q^2)^{\ell_r j_r L}_{o} = (-1)^{\ell_r + L + j} \epsilon\epsilon_1\epsilon_2 \, G(q^2)^{\ell_r j_r L}_{o}} \qquad (8a)$$

$$\boxed{G(q^2)^{\ell_r j_r L}_{\pm\mu} = \pm (-1)^{L+j} \epsilon\epsilon_1\epsilon_2 \, G(q^2)^{\ell_r j_r L}_{\pm\mu} \quad , \mu > 0} \qquad (8b)$$

Cette dernière expression entraine que pour $j_1..j_r$ et L fixés, soit les coefficients $G(q^2)^{\ell_r j_r L}_{\mu}$ à μ positif soit ceux à μ négatif sont nuls.

La règle de sélection due à l'invariance par renversement du temps se déduit immédiatement de l'équation (10-25), on a

$$\boxed{G(q^2)^{\ell_r j_r L}_{\mu} = (-1)^{r} \epsilon_T \, G(q^2)^{\ell_r j_r L \, *}_{\mu}} \qquad (9)$$

c'est-à-dire les facteurs de forme multipolaires sont réels ou imaginaires.

De même, on déduit de (10-30), que dans le cas de particules identiques, l'hermiticité de l'opérateur implique la condition

$$\boxed{G(q^2)^{\ell_r j_r L}_{\mu} = (-1)^{L+j} \, G(q^2)^{\ell_r j_r L \, *}_{\mu}} \qquad (10)$$

11.3-Facteurs de forme invariants des fonctions de vertex scalaires

Considérons les fonctions de vertex réduites d'un opérateur scalaire, $A(q^2,u,\{e\})^{L}_{M}$. Nous avons vu, Eq.(9-38), que ces fonctions sont inchangées si on fait agir une transformation de Lorentz pure sur la tétrade $\{e\}$, en particulier, si on change de référentiel dans le 2-plan

$(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$. Les harmoniques sphériques scalaires sont elles aussi invariantes dans une telle transformation, cf.Eq.(6-23), c'est pourquoi les facteurs de forme des fonctions de vertex scalaires ne dépendent pas du choix de $\underline{e}$ et sont donc invariants. Ils sont définis par, Eq.(10-1),

$$A(q^2,u,\{e\})^{L\ *}_{M} = F(q^2)^L\ Y^L_M(u,\{e\})^* \quad , \tag{11}$$

et la relation inverse est

$$F(q^2)^L = \int Y^L_M(u,\{e\})\ A(q^2,u,\{e\})^{L\ *}_{M}\, d\Omega(u,\{e\}) . \tag{12}$$

L'invariance par parité et par renversement du temps implique des règles de sélection sur ces facteurs de forme. Ces règles ont été établie de façon générale au paragraphe précédent, dans ce cas particulier elles deviennent

$$F(q^2)^L = \epsilon\epsilon_1\epsilon_2\ (-1)^L\ F(q^2)^L \quad , \tag{13}$$

$$F(q^2)^L = \epsilon_T\ F(q^2)^{L\ *} \quad . \tag{14}$$

Pour $\epsilon\epsilon_1\epsilon_2 = 1$ les coefficients à L impair sont nuls, tandis que pour $\epsilon\epsilon_1\epsilon_2 = -1$, ce sont ceux à L pair qui sont nuls. Si $\epsilon_T = 1$, les facteurs de forme sont réels tandis que pour $\epsilon_T = -1$, ils sont imaginaires, mais dans les deux cas ils sont tous en phase.

11.4-Facteurs de forme multipolaires irréductibles des fonctions de vertex quadrivectorielles

Les fonctions de vertex réduites $\underline{A}(q^2,u,\{e\})^L_M$ d'un opérateur quadrivectoriel sont inchangées si on fait agir une transformation de Lorentz pure sur la tétrade de référence, cf. Eq.(9-38), c'est-à-dire

$$\underline{A}(q^2,Lu,L\{e\})^L_M = \underline{A}(q^2,u,\{e\})^L_M \quad . \tag{15}$$

Par contre les quatre multipoles quadrivectoriels à L et M fixés, $\underline{\mathcal{E}}_t(\underline{u})^L_M$, $\underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{L}}(\underline{u})^L_M$, $\underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}(\underline{u})^L_M$ et $\underline{\mathcal{M}}_{\mathcal{C}}(\underline{u})^L_M$ se transforment dans les transformations pures du 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$ selon, cf.Eq.(7-30,31),

$$\underline{\mathcal{E}}_t(Lu,L\{e\})^L_M = \mathrm{ch}\ \chi\ \underline{\mathcal{E}}_t(u,\{e\})^L_M + \mathrm{sh}\ \chi\ \underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{L}}(u,\{e\})^L_M \quad , \tag{16a}$$

$$\underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{L}}(Lu,L\{e\})^L_M = \mathrm{sh}\ \chi\ \underline{\mathcal{E}}_t(u,\{e\})^L_M + \mathrm{ch}\ \chi\ \underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{L}}(u,\{e\})^L_M \quad , \tag{16b}$$

$$\underline{\mathcal{E}}_{\varphi}(Lu,L\{e\})^{L}_{M} = \underline{\mathcal{E}}_{\varphi}(u,\{e\})^{L}_{M} \quad , \tag{1}$$

$$\underline{\mathcal{M}}_{\varphi}(Lu,L\{e\})^{L}_{M} = \underline{\mathcal{M}}_{\varphi}(u,\{e\})^{L}_{M} \quad . \tag{1}$$

i.e. ce sont des multipoles irréductibles.

Les facteurs de forme multipolaires irréductibles sont les coefficients du développement des fonctions de vertex réduites sur les multipoles irréductibles. Ils sont définis par

$$\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{L\,*}_{M} = \mathcal{E}_{t}(q^2,e)^{L}\ \underline{\mathcal{E}}_{t}(u,\{e\})^{L\,*}_{M} + \mathcal{E}_{\ell}(q^2,e)^{L}\ \underline{\mathcal{E}}_{\ell}(u,\{e\})^{L\,*}_{M}$$
$$+ \mathcal{E}_{\varphi}(q^2)^{L}\ \underline{\mathcal{E}}_{\varphi}(u,\{e\})^{L\,*}_{M} + \mathcal{M}_{\varphi}(q^2)^{L}\ \underline{\mathcal{M}}_{\varphi}(u,\{e\})^{L\,*}_{M} \tag{18}$$

ou par les relations inverses

$$\mathcal{E}_{t}(q^2,e)^{L} = \int \underline{\mathcal{E}}_{t}(u,\{e\})^{L}_{M}\cdot\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{L\,*}_{M}\,d\Omega(u,\{e\}) \quad ,$$

$$\mathcal{E}_{\ell}(q^2,e)^{L} = -\int \underline{\mathcal{E}}_{\ell}(u,\{e\})^{L}_{M}\cdot\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{L\,*}_{M}\,d\Omega(u,\{e\}) \quad ,$$

$$\mathcal{E}_{\varphi}(q^2)^{L} = -\int \underline{\mathcal{E}}_{\varphi}(u,\{e\})^{L}_{M}\cdot\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{L\,*}_{M}\,d\Omega(u,\{e\}) \quad ,$$

$$\mathcal{M}_{\varphi}(q^2)^{L} = -\int \underline{\mathcal{M}}_{\varphi}(u,\{e\})^{L}_{M}\cdot\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{L\,*}_{M}\,d\Omega(u,\{e\}) \quad ,$$

qui se déduisent de (18) à l'aide de la relation d'orthonormalité des multipoles (7-2) et de l'équation (7-33).

Les relations (17) impliquent que les facteurs de forme transversaux électrique $\mathcal{E}_{\varphi}(q^2)^{L}$ et magnétique $\mathcal{M}_{\varphi}(q^2)^{L}$, sont invariants (scalaires) et les lois de transformations (16) impliquent

$$\mathcal{E}_{t}(q^2,Le)^{L} = \mathrm{ch}\,\chi\ \mathcal{E}_{t}(q^2,e) - \mathrm{sh}\,\chi\ \mathcal{E}_{\ell}(q^2,e) \tag{20a}$$

$$\mathcal{E}_{\ell}(q^2,Le)^{L} = -\,\mathrm{sh}\,\chi\ \mathcal{E}_{t}(q^2,e) + \mathrm{ch}\,\chi\ \mathcal{E}_{\ell}(q^2,e) \tag{20b}$$

L'invariance par parité et par renversement du temps imposent aux facteurs de forme irréductibles les règles de sélection

$$\mathcal{M}_{\varphi}(q^2)^{L} = -\,(-1)^{L}\,\epsilon\epsilon_{1}\epsilon_{2}\ \mathcal{M}_{\varphi}(q^2)^{L} \tag{21a}$$

$$\mathcal{E}\ (q^2)^{L} = (-1)^{L}\,\epsilon\epsilon_{1}\epsilon_{2}\ \mathcal{E}\ (q^2)^{L} \tag{21b}$$

$$Z\ (q^2)^{L} = -\,\epsilon_{T}\ Z(q^2)^{L\,*} \tag{22}$$

où la relation (21b) est valable pour les trois facteurs de forme électriques et la relation (22) pour les quatre.

Comme en (11-4), les facteurs de forme irréductibles peuvent être utilisés pour développer les composantes sphériques des fonctions de vertex standard et réduites sur la base des harmoniques sphériques scalaires, on obtient

$$\left[A(q^2,u)^{n_2}_{\ n_1}\right]^j_n = \sum_L \langle s_2 n_2 | LM\ s_1 n_1\rangle \left[A(q^2,u)^{L\,*}_M\right]^j_n \qquad (23)$$

$$\left[A(q^2,u)^{L\,*}_M\right]^j_n = \left[\delta_{jo}\ \mathcal{E}_t(q^2,e,)^L + \delta_{j1}\ \mathcal{M}_{\ell}(q^2)^L\right]\langle LM|Lmjn\rangle\ Y^L_m(u)^* \qquad (24)$$

$$+ \left[\sqrt{\frac{L+1}{2L+1}}\ \mathcal{E}_{\ell}(q^2,e)^L + \sqrt{\frac{L}{2L+1}}\ \mathcal{E}_{\ell}(q^2)^L\right]\langle LM|L+1\ mjn\rangle Y^{L+1}_m(u)^*$$

$$+ \left[-\sqrt{\frac{L}{2L+1}}\ \mathcal{E}_{\ell}(q^2,e)^L + \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}}\ \mathcal{E}_{\ell}(q^2)^L\right]\langle LM|L-1\ mjn\rangle Y^{L-1}_m(u)^*$$

Cette relation est une généralisation, à un référentiel arbitraire, du développement multipolaire donné par Durand, De Celles et Marr en hélicité et sans le système de Breit. Les relations entre nos facteurs de forme dans le système de Breit et ceux de ces auteurs [DDM.62] sont données ci-dessous

$$\mathcal{E}_t(q^2,e_B)^L = (-1)^{L+s_1-s_2}\ \sqrt{\frac{4\pi}{(2L+1)(2s_2+1)}}\ Q_L(q^2) \qquad (25a)$$

$$\mathcal{E}_{\ell}(q^2,e_B)^L = (-1)^{L+s_1-s_2}\ \sqrt{\frac{8\pi}{(2L+1)(2s_2+1)}}\ E_L(q^2) \qquad (25b)$$

$$\mathcal{E}_{\ell}(q^2,e_B)^L = -\,(-1)^{L+s_1-s_2}\ \sqrt{\frac{8\pi}{(2L+1)(2s_2+1)}}\ M_L(q^2) \qquad (25c)$$

Ces auteurs ne définissent que trois facteurs de forme, car ils imposent d'emblée la conservation du courant vectoriel que nous étudions au paragraphe suivant.

En hélicité, l'équation (24) devient

$$\left[A(q^2,e_3)^{L*}\right]^j_o = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}\left[\delta_{jo}\ \mathcal{E}_t(q^2,e)^L - \delta_{j1}\ \mathcal{E}_{\ell}(q^2,e)^L\right] \qquad (26a)$$

$$\left[A(q^2,e_3)^{L*}\right]^1_{\pm} = \sqrt{\frac{2L+1}{8\pi}}\ \left[\mathcal{E}_{\ell}(q^2)^L \mp \mathcal{M}_{\ell}(q^2)^L\right] \qquad (26b)$$

Dans les cas particuliers où $s_1 = 0$ ou ½, en explicitant la conservation de la parité, on peut écrire le développement multipolaire des composantes sphériques des fonctions de vertex standard, en hélicité, à l'aide des équations (10-13,14) sous la forme

Bosons : $s_1 = 0$

$$\sqrt{4\pi}\,[A(q^2,e_3)^{n_2}]^j_o = \delta_{n_2 o}\sqrt{2s_2+1}\,\frac{1+\epsilon\epsilon_1\epsilon_2(-1)^{s_2}}{2}\,[\delta_{jo}\,\mathcal{E}_t(q^2,e)^{s_2} - \delta_{j1}\,\mathcal{E}_\ell(q^2,e)^{s_2}] \qquad (27a)$$

$$\sqrt{8\pi}\,[A(q^2,e_3)^{n_2}]^1_{\pm 1} = \delta_{n_2 \pm 1}\sqrt{2s_2+1}\,\left[\frac{1+\epsilon\epsilon_1\epsilon_2(-1)^{s_2}}{2}\,\mathcal{E}_\varphi(q^2)^{s_2} \mp \frac{1-\epsilon\epsilon_1\epsilon_2(-1)^{s_2}}{2}\,\mathcal{M}_\varphi(q^2)^{s_2}\right] \qquad (27b)$$

Fermions : $s_1 = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{4\pi}\,[A(q^2,e_3)^{n_2}_{\pm\frac{1}{2}}]^j_o = \delta_{n_2 \pm \frac{1}{2}}\sqrt{s_2+\tfrac{1}{2}}\left\{\mp\frac{1+\epsilon\epsilon_1\epsilon_2(-1)^{s_2+\frac{1}{2}}}{2}\,[\delta_{jo}\,\mathcal{E}_t(q^2,e)^{s_2+\frac{1}{2}} - \delta_{j1}\,\mathcal{E}_\ell(q^2,e)^{s_2+\frac{1}{2}}] + \frac{1-\epsilon\epsilon_1\epsilon_2(-1)^{s_2+\frac{1}{2}}}{2}\,[\delta_{jo}\,\mathcal{E}_t(q^2,e)^{s_2-\frac{1}{2}} - \delta_{j1}\,\mathcal{E}_\ell(q^2,e)^{s_2-\frac{1}{2}}]\right\} \qquad (28a)$$

$$\sqrt{8\pi}\,[A(q^2,e_3)^{n_2}_{\pm\frac{1}{2}}]^1_{\pm} = \delta_{n_2 \pm 3/2}\left\{\begin{matrix}-\\+\end{matrix}\frac{1+\epsilon\epsilon_1\epsilon_2(-1)^{s_2+\frac{1}{2}}}{2}\,[\sqrt{s_2-\tfrac{1}{2}}\;\mathcal{E}_\varphi(q^2)^{s_2+\frac{1}{2}} + \sqrt{s_2+3/2}\;\mathcal{M}_\varphi(q^2)^{s_2 s\frac{1}{2}}] + \frac{1-\epsilon\epsilon_1\epsilon_2(-1)^{s_2+\frac{1}{2}}}{2}\,[\sqrt{s_2+3/2}\;\mathcal{E}_\varphi(q^2)^{s_2-\frac{1}{2}} + \sqrt{s_2-\tfrac{1}{2}}\;\mathcal{M}_\varphi(q^2)^{s_2+\frac{1}{2}}]\right\} \qquad (28b)$$

$$\sqrt{8\pi}\,[A(q^2,e_3)^{n_2}_{\pm\frac{1}{2}}]^1_{\mp} = \delta_{n_2 \mp \frac{1}{2}}\left\{\mp\frac{1+\epsilon\epsilon_1\epsilon_2(-1)^{s_2+\frac{1}{2}}}{2}\,[\sqrt{s_2+3/2}\;\mathcal{E}_\varphi(q^2)^{s_2+\frac{1}{2}} - \sqrt{s_2-\tfrac{1}{2}}\;\mathcal{M}_\varphi(q^2)^{s_2-\frac{1}{2}}] + \frac{1-\epsilon\epsilon_1\epsilon_2(-1)^{s_2+\frac{1}{2}}}{2}\,[\sqrt{s_2-\tfrac{1}{2}}\;\mathcal{E}_\varphi(q^2)^{s_2-\frac{1}{2}} - \sqrt{s_2+3/2}\;\mathcal{M}_\varphi(q^2)^{s_2+\frac{1}{2}}]\right\} \qquad (28c)$$

11.5-Conservation du courant vectoriel

L'hypothèse de conservation du courant vectoriel s'exprime par la condition suivante sur les fonctions de vertex standard

$$\underline{q}\cdot\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{n_2}_{n_1} = 0 \qquad (29)$$

En utilisant l'équation (9-34) et l'orthogonalité des coefficients-CG, on obtient

$$\underline{q}\cdot\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{L\,*}_{M} = 0 \qquad (30)$$

Les quadrivecteurs $\underline{e}$ et $\underline{u}$ forment une base orthonormale du 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p}_2)$, $\underline{q}$ est donc une combinaison linéaire de $\underline{e}$ et $\underline{u}$, et l'équation (30) peut s'écrire

$$(\underline{q}.\underline{e})\underline{e}.\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{L\,*}_{M} - (\underline{q}.\underline{u})\underline{u}.\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{L\,*}_{M} = 0 \qquad (31)$$

L'équation (18) et les propriétés géométriques des multipoles (7-27,28,29) conduisent à une relation entre deux facteurs de forme multipolaires irréductibles

$$\boxed{(\underline{q}.\underline{e})\ \mathcal{E}_t(q^2,e)^L - (\underline{q}.\underline{u})\ \mathcal{E}_{\ell}(q^2,e)^L = 0} \qquad (32)$$

Dans le cas particulier où $\underline{q}^2 = 0$, elle devient

$$\mathcal{E}_t(0,e)^L = \pm\ \mathcal{E}_{\ell}(0,e)^L \quad . \qquad (33)$$

Selon le signe de $\underline{q}^2$, on peut choisir judicieusement les quadrivecteurs $\underline{e}$ et $\underline{u}$ de sorte que la condition (32) annule un des facteurs de forme. l'aide des relations (9-22,48), on démontre les conditions

$$\underline{q}^2 > 0 \qquad \mathcal{E}_t(q^2,e_C) = 0 \quad , \qquad (34a)$$

$$\underline{q}^2 < 0 \qquad \mathcal{E}_{\ell}(q^2,e_B)^L = 0 \quad . \qquad (34b)$$

Dans le cas de particules identiques et d'un opérateur hermitiqu on peut faire les remarques suivantes. En hélicité, on extrait des équa tions (23) et (24) les relations

$$[A(q^2,e_3)^n{}_n]^o_o = \sum_L \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}\ \langle sn|LOsn\rangle\ \mathcal{E}_t(q^2,e)^L \quad , \qquad (35a)$$

$$[A(q^2,e_3)^n{}_n]^1_o = -\sum_L \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}\ \langle n|LOsn\rangle\ \mathcal{E}_{\ell}(q^2,e)^L \quad . \qquad (35b)$$

La règle de sélection (10-29) implique que les membres des équa- tions (35a et b) s'annulent respectivement pour $\epsilon\epsilon_T = 1$ et -1, on a alo

$$\epsilon\epsilon_T = 1 \quad , \qquad \mathcal{E}_t(q^2,e)^L = 0 \qquad (36a)$$

$$\epsilon\epsilon_T = -1, \qquad \mathcal{E}_{\ell}(q^2,e)^L = 0 \qquad (36b)$$

Donc les conditions de conservation du courant vectoriel (32a) et (32b) sont identiquement satisfaites si on a $\underline{q}^2 > 0$ et $\epsilon\epsilon_T = 1$ ou $\underline{q}^2 < 0$ et $\epsilon\epsilon_T = -1$, respectivement. Ce résultat a déjà été remarqué par Ernst, Sachs et Wali [E.S.W.60] pour les spins ½ et il a été généralisé à des spins quelconques par Durand, De Celles et Marr dans le cas particulier où $\underline{q}^2$ est négatif.

11.6-Facteurs de forme multipolaires irréductibles des fonctions de vertex tensorielles d'ordre 2

Les fonctions de vertex réduites $\underline{\underline{A}}(q^2,u,\{e\})^L_M$ d'un opérateur tensoriel d'ordre 2 sont inchangées si on fait agir une transformation de Lorentz pure sur la tétrade de référence,cf.Eq.(9-38),i.e.,

$$\underline{\underline{A}}(q^2,Lu,L\{e\})^L_M = \underline{\underline{A}}(q^2,u,\{e\})^L_M \qquad (37)$$

Par contre, dans une telle transformation, les multipoles $\underline{\underline{Z}}^x_\eta(u)^L_M$ sont invariants tandis que les multipoles irréductibles $\underline{\underline{Z}}^{xi}_n(u)^L_M$ se transforment suivant la loi, (cf.Eq.7-50,59),

$$L \otimes L\ \underline{\underline{Z}}^{xi}_n(u)^L_M = B\ (n\chi)^i_j\ \underline{\underline{Z}}^{xj}_n(u)^L_M \quad . \qquad (38)$$

On définit les facteurs de forme multipolaires irréductibles en décomposant les fonctions de vertex réduites sur les multipoles irréductibles, soit,

$$\boxed{\underline{\underline{A}}(q^2,u,\{e\})^{L\ *}_M = \sum_{Z,x}\left[\sum_{n,i} Z^{xi}_n(q^2,e)^L\ \underline{\underline{Z}}^{xi}_n(u,\{e\})^{L\ *}_M + \sum_\eta Z^x_\eta(q^2)^L \underline{\underline{Z}}^x_\eta(u,\{e\})^{L\ *}_M\right]} \qquad (39)$$

On peut inverser cette équation en utilisant les définitions des multipoles irréductibles et la relation d'orthogonalité des multipoles tensoriels,Eq.(7-2), on obtient

$$Z^{xi}_n(q^2,e)^L = (-1)^{n+i}\int \underline{\underline{Z}}^{xi}_n(u,\{e\})^L_M : \underline{\underline{A}}(q^2,u,\{e\}), \qquad (40a)$$

$$X^x_\eta(q^2)^L = \int \underline{\underline{Z}}^x_\eta(u,\{e\})^L_M : \underline{\underline{A}}(q^2,u,\{e\})^{L\ *}_M\ d\Omega(u,\{e\}) \ , \qquad (40b)$$

$$\mathcal{M}^a_\chi(q^2)^L = -\int \underline{\underline{\mathcal{M}}}^a_\chi(u,\{e\})^L_M : \underline{\underline{A}}(q^2,u,\{e\})^{L\ *}_M\ d\Omega(u,\{e\}) \ , \qquad (40c)$$

où l'équation (40c) est une exception à (40b).

La loi de transformation (38) entraîne que les facteurs de forme $Z^x_\eta(q^2)^L$ sont invariants tandis que les facteurs de forme $Z^{xi}_n(q^2,e)^L$ se transforment suivant la loi

$$\boxed{Z^{xi}_n(q^2,Le)^L = \sum_j B\ (-n\chi)^i_j\ Z^{xj}_n(q^2,e)^L} \qquad (41)$$

L'invariance par parité et par renversement du temps imposent aux facteurs de forme multipolaires irréductibles, les règles de sélection

$$\mathcal{M}(q^2)^L = (-1)^L \epsilon\epsilon_1\epsilon_2 \mathcal{M}(q^2)^L \tag{42a}$$

$$\mathcal{E}(q^2)^L = -(-1)^L \epsilon\epsilon_1\epsilon_2 \mathcal{E}(q^2)^L \tag{42b}$$

$$Z(q^2)^L = \epsilon_T Z(q^2)^{L*} \tag{43}$$

où les relations (42a,42b) sont valables respectivement pour les facteu de forme magnétiques et électriques, et la relation (43) pour les deux types.

Les facteurs de forme multipolaires irréductibles s'expriment en fonction des facteurs de forme multipolaires de la même manière que les multipoles irréductibles s'expriment en fonction des multipoles tensori d'ordre 2, par les équations (7-66).

A l'aide de ces équations et de la relation (11-5), on peut expr mer les composantes sphériques des fonctions de vertex réduites, en hélicité, en fonction des facteurs de forme multipolaires irréductibles Les résultats sont rassemblés dans formule (45), où, pour ne considérer que des tenseurs symétriques ou antisymétriques, nous posons

$$[A(q^2,e_3)^{L*}]_n^{1a^s} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{[A(q^2,e_3)^{L*}]_n^{1o1} \pm [A(q^2,e_3)^{L*}]_n^{11o}\right\} \tag{44}$$

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}[A(q^2,e_3)^{L*}]_o^{ooo} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\,\mathcal{M}_2^{so}(q^2,e)^L + \mathcal{M}_{\mathcal{Y}}^{s}(q^2)^L + \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^{s}(q^2)^L\right]$$

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}[A(q^2,e_3)^{L*}]_o^{o11} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[-\sqrt{2}\,\mathcal{M}_2^{so}(q^2,e)^L + 3\,\mathcal{M}_{\mathcal{Y}}^{s}(q^2)^L - \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^{s}(q^2)^L\right]$$

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}[A(q^2,e_3)^{L*}]_n^{1s} = \delta_{no}\,\mathcal{M}_2^{s1}(q^2,e)^L + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\text{in}\,\mathcal{E}_1^{so}(q^2,e)^L + n\,\mathcal{M}_1^{so}(q^2,e)^L\right.$$

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}[A(q^2,e_3)^{L*}]_n^{1a} = \delta_{no}\,\mathcal{M}_{\mathcal{L}}^{a}(q^2)^L + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\text{in}\,\mathcal{E}_1^{ao}(q^2,e)^L + n\,\mathcal{M}_1^{ao}(q^2,e)^L\right]$$

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}[A(q^2,e_3)^{L*}]_n^{111} = \delta_{no}\,\mathcal{E}_{\mathcal{C}}^{a}(q^2)^L + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\text{in}\,\mathcal{E}_1^{a1}(q^2,e)^L + n\,\mathcal{M}_1^{a1}(q^2,e)^L\right]$$

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}[A(q^2,e_3)^{L*}]_o^{211} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathcal{M}_2^{so}(q^2,e)^L - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathcal{M}_{\mathcal{Y}}^{s}(q^2)^L$$

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}[A(q^2,e_3)^{L*}]_{\pm1}^{211} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{E}_1^{s1}(q^2,e)^L \pm \mathcal{M}_1^{s1}(q^2,e)^L\right]$$

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}[A(q^2,e_3)^{L*}]_{\pm2}^{211} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{E}_{\mathcal{C}}^{s}(q^2)^L \pm \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{s}(q^2)^L\right]$$

11.7-Contraintes sur l'opérateur tensoriel

Quand on impose des contraintes sur l'opérateur tensoriel, cela se traduit par des conditions sur les facteurs de forme irréductibles

i) Si l'opérateur tensoriel $\underline{\underline{A}}$ a une trace nulle, l'équation (7-60) entraine que le facteur de forme scalaire est nul

$$\underline{\underline{A}} : \underline{q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}^{s}_{y}(q^2)^L = 0 \tag{46}$$

ii) Si l'opérateur tensoriel $\underline{\underline{A}}$ est symétrique (ou antisymétrique) les facteurs de forme correspondant aux multipoles antisymétriques (ou symétriques) sont nuls

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu} \quad \Rightarrow \quad Z^{a}(q^2)^L = 0 \tag{47a}$$

$$A^{\mu\nu} = - A^{\nu\mu} \quad \Rightarrow \quad Z^{s}(q^2)^L = 0 \tag{47b}$$

iii) Si l'opérateur $\underline{\underline{A}}$ est symétrique, de trace nulle, et orthogonal au transfert $\underline{q}$,

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{q} = \underline{q} \cdot \underline{\underline{A}} = 0 \quad , \tag{48}$$

en plus des équations (46) et (47a) on obtient, par la même méthode que pour la conservation du courant vectoriel, les quatre conditions

$$(\underline{q}\cdot\underline{e})\,\mathcal{M}^{so}_{2}(q^2,e)^L - (\underline{q}\cdot\underline{u})\,\mathcal{M}^{s1}_{2}(q^2,e)^L = 0 \quad , \tag{49a}$$

$$(\underline{q}\cdot\underline{u})\,\mathcal{M}^{so}_{2}(q^2,e)^L - (\underline{q}\cdot\underline{e})\,\mathcal{M}^{s1}_{2}(q^2,e)^L = 0 \quad , \tag{49b}$$

$$(\underline{q}\cdot\underline{e})\,\mathcal{M}^{so}_{1}(q^2,e)^L - (\underline{q}\cdot\underline{u})\,\mathcal{M}^{s1}_{1}(q^2,e)^L = 0 \quad , \tag{49c}$$

$$(\underline{q}\cdot\underline{e})\,\mathcal{E}^{so}_{1}(q^2,e)^L - (\underline{q}\cdot\underline{u})\,\mathcal{E}^{s1}_{1}(q^2,e)^L = 0 \quad . \tag{49d}$$

Dans le cas particulier où $\underline{q}^2 = 0$, les équations (49) deviennent

$$\mathcal{M}^{so}_{2}(0,e)^L = \pm\mathcal{M}^{s1}_{2}(0,e)^L \quad , \tag{50a}$$

$$\mathcal{M}^{so}_{1}(0,e)^L = \pm\mathcal{M}^{s1}_{1}(0,e)^L \quad , \tag{50b}$$

$$\mathcal{E}^{so}_{1}(0,e)^L = \pm\mathcal{E}^{s1}_{1}(0,e)^L \quad . \tag{50c}$$

Mais dans le cas où $\underline{q}^2$ n'est pas nul, les équations (49a) et (49b) sont incompatibles et on obtient

$$\mathcal{M}^{so}_{2}(q^2,e)^L = \mathcal{M}^{s1}_{2}(q^2,e)^L = 0 \quad , \tag{51}$$

et en choisissant $\underline{e}$ et $\underline{u}$ judicieusement selon que $\underline{q}^2$ est positif ou négatif, les équations (49c) et (49d) se réduisent à

$$\underset{\sim}{q}^2 > 0 \quad , \quad \mathcal{M}_1^{so}(q^2, e_C)^L = \mathcal{E}_1^{so}(q^2, e_C)^L = 0 \quad , \tag{52a}$$

$$\underset{\sim}{q}^2 < 0 \quad , \quad \mathcal{M}_1^{s1}(q^2, e_B)^L = \mathcal{E}_1^{s1}(q^2, e_B)^L = 0 \quad . \tag{52b}$$

CHAPITRE QUATRIEME

DEVELOPPEMENT MULTIPOLAIRE DES FONCTIONS DE VERTEX A DEUX PARTICULES FINALES

12 - RAPPELS SUR LES ETATS A DEUX PARTICULES

Les états standard à deux particules sont le produit tensoriel des états standard à une particule et ne sont pas irréductibles. En utilisant le couplage ℓS, [Mo .St .66], nous construisons les états canoniques à deux particules qui sont irréductibles et dont la loi de transformation dans un changement de référentiel ne dépend plus des impulsions des états. Ensuite, nous étudions l'action des opérations de parité et de renversement du temps sur ces états canoniques.

12.1-Etats standard à deux particules

Les états d'un système de deux particules de spin s_2 et s_3 et d'impulsion $\underline{p}_2$ et $\underline{p}_3$ peuvent être décrits par les produits tensoriels des états à une particule. On déduit de (8-26) la loi de transformation de ces produits tensoriels d'états

$$U(\Lambda)(\,|\{\Lambda^{-1}p_3\}n_3\rangle \otimes |\{\Lambda^{-1}p_2\}n_2\rangle) = |\Lambda\{\Lambda^{-1}p_3\}n_3\rangle \otimes |\Lambda\{\Lambda^{-1}p_2\}n_2\rangle \quad (1)$$

$$= |\{p_3\}n_3'\rangle \otimes |\{p_2\}n_2'\rangle\, D^{s_3}[R_e(\{p_3\},\{\Lambda^{-1}p_3\},\Lambda)]^{n_3'}_{n_3} D^{s_2}[R_e(\{p_2\},\{\Lambda^{-1}p_2\},\Lambda)]^{n_2'}_{n_2}$$

Quand les tétrades sont arbitraires, on ne peut réduire le produit tensoriel de représentations de rotations différentes. Pour avoir des rotations identiques on choisit comme tétrades, les tétrades spéciales qui caractérisent les états standard à une particule, Cf.Eq.(8-3,23,24). On construit ainsi les états standard à deux particules

$$|p_3p_2,\{e\}n_3n_2\rangle = |\{p_3\}_e n_3\rangle \otimes |\{p_2\}_e n_2\rangle \quad , \quad (2a)$$

$$|p_3p_2,\Lambda\{e\}n_3n_2\rangle = |\{p_3\}^{\Lambda}_e n_3\rangle \otimes |\{p_2\}^{\Lambda}_e n_2\rangle \quad , \quad (2b)$$

$$|\Lambda^{-1}p_3,\Lambda^{-1}p_2,\{e\}n_3n_2\rangle = |\{\Lambda^{-1}p_3\}_{\Lambda^{-1}e} n_3\rangle \otimes |\{\Lambda^{-1}p_2\}_{\Lambda^{-1}e} n_2\rangle \quad . \quad (2c)$$

Pour ces états standard la loi de transformation (1) devient

$$U(\Lambda)|\Lambda^{-1}p_3\Lambda^{-1}p_2,\{e\}n_3n_2\rangle = |p_3p_2,\Lambda\{e\}n_3n_2\rangle \quad (3)$$

$$= |p_3p_2,\{e\}n_3'n_2'\rangle\, D^{s_3}(R_\Lambda)^{n_3'}_{n_3}\, D^{s_2}(R_\Lambda)^{n_2'}_{n_2}$$

Dans ce cas les deux rotations de Wigner sont égales et on pourra réduire le produit tensoriel de représentations à l'aide des coefficients-CG (2-25).

Les états standard sont reliés aux états dans des tétrades arbitraires par la relation

$$|\, p_3 p_2, \{e\} n_3 n_2\rangle = |\, \{p_3\} n_3'\rangle \otimes |\, \{p_2\} n_2'\rangle \; D^{s_3}([p_3]^{-1} L(p_3))^{n_3'}_{n_3} \; D^{s_2}([p_2]^{-1} L(p_2))^{n_2'}_{n_2} \qquad (4)$$

où les rotations de Wigner indiquent l'orientation relative des tétrades arbitraires par rapport aux tétrades $\{p_i\}_e$.

12.2-Paramétrisation des états standard à deux particules

Les impulsions $\underline{p}_2$ et $\underline{p}_3$ des particules peuvent être remplacées par deux quadrivecteurs orthogonaux, l'un de genre temps, l'autre de genre espace, formant une base du 2-plan $\underline{p}_2, \underline{p}_3$. Le quadrivecteur de genre temps est l'impulsion totale des deux particules

$$\underline{p} = \underline{p}_2 + \underline{p}_3 \quad , \qquad (5)$$

tandis que le quadrivecteur de genre espace est unitaire ($\underline{k}^2 = -1$) ,

$$\underline{k} = C\, \{-, \hat{p} | \hat{p}_2, \hat{p}_3\} \quad , \quad C = \{\hat{p}_2, \hat{p}_3 | \hat{p}_3, \hat{p}_2\}^{-\frac{1}{2}} \quad , \qquad (6)$$

où l'on utilise les notations définies en (8-7). La constante C s'exprime en fonctions des masses M_2 et M_3 et de l'invariant $\underline{p}^2$ sous la forme

$$C = \frac{2M_2M_3}{\sqrt{\lambda(\sqrt{p^2}, M_2, M_3)}} \quad , \qquad (7)$$

où la fonction λ est définie par

$$\lambda(a,b,c) = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca \; . \qquad (8)$$

A partir de la référence $\{e\}$, nous définissons les tétrades suivantes,

$$\{p\}_e = L(p)\, \{e\} \quad , \qquad (9a)$$

$$\{p\}^{\Lambda}_e = L(p)\, L^{-1}_{\Lambda}\, \Lambda\, \{e\} = L(p)\, R_{\Lambda}\, \{e\} \; , \qquad (9b)$$

$$\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e} = L(\Lambda^{-1}p \leftarrow\!\!- \Lambda^{-1}e)\, L_{\Lambda^{-1}}\, \{e\} \quad , \qquad (9c)$$

et, dans ces tétrades, on peut écrire les états standard ,

$$|\underline{k},\{p\}_e n_3 n_2\rangle \equiv |p_3 p_2,\{e\} n_3 n_2\rangle \quad , \tag{10a}$$

$$|\underline{k},\{p\}^{\Lambda}_{e} n_3 n_2\rangle \equiv |p_3 p_2, \Lambda\{e\} n_3 n_2\rangle \quad , \tag{10b}$$

$$|\Lambda^{-1}\underline{k},\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e} n_3 n_2\rangle \equiv |\Lambda^{-1}p_3,\Lambda^{-1}p_2,\{e\} n_3 n_2\rangle \quad . \tag{10c}$$

Nous remarquons que, à n_2 et n_3 fixés, pour caractériser ces états il nous suffit de connaitre les quadrivecteurs $\underline{k}$, $\underline{p}$ ou $\Lambda^{-1}\underline{k}$, $\Lambda^{-1}\underline{p}$ et la tétrade $\{e\}$ ou $\Lambda\{e\}$. Les quadrivecteurs $\underline{k}$ et $\Lambda^{-1}\underline{k}$ sont orthogonaux aux quadrivecteurs $\underline{p}$ et $\Lambda^{-1}\underline{p}$. En utilisant les transformations de Lorentz inverses de celles qui interviennent dans les définitions (9) des tétrades, on peut construire à partir de $\underline{k}$ et $\Lambda^{-1}\underline{k}$, trois quadrivecteurs $\underline{v}$, $\underline{v}'$ (orthogonaux à $\underline{e}$), $\underline{v}''$ (orthogonal à $\Lambda\underline{e}$)

$$\underline{v} = L^{-1}(p)\ \underline{k} \quad , \tag{11a}$$

$$\underline{v}' = \left[L(p)\ L_{\Lambda}^{-1}\right]^{-1}\ \underline{k} \quad , \tag{11b}$$

$$\underline{v}'' = \left[L(\Lambda^{-1}p \longleftarrow \Lambda^{-1}e)\ L_{\Lambda^{-1}}\right]^{-1}\ \Lambda^{-1}\underline{k} \tag{11c}$$

Ces trois quadrivecteurs sont reliés de façon très simple. En effet en utilisant l'identité (5-34), on obtient

$$\underline{v}' = L_{\Lambda}\,\underline{v} \quad , \tag{12a}$$

$$\underline{v}'' = \Lambda^{-1}\,\underline{v}' = R_{\Lambda}^{-1}\,\underline{v} \quad . \tag{12b}$$

En utilisant la définition (6) du quadrivecteur $\underline{k}$, on peut mettre les quadrivecteurs $\underline{v}$, $\underline{v}'$et v" sous la forme

$$\underline{v} = C\ \{-,e|L^{-1}(p)\ \hat{p}_2,e\} \quad , \tag{13a}$$

$$\underline{v}' = C\ \{-,\Lambda e|L_{\Lambda}L^{-1}(p)\hat{p}_2,\ \Lambda e\} \quad , \tag{13b}$$

$$\underline{v}'' = C\ \{-,e|R_{\Lambda}^{-1}\ L^{-1}(p)\ \hat{p}_2,e\} \quad . \tag{13c}$$

Dans la suite, les états standard sont paramétrés par les quadrivecteurs $\underline{v}$, $L_{\Lambda}\underline{v}$ et $R_{\Lambda}^{-1}\,\underline{v}$ au lieu de $\underline{k}$ et $\Lambda^{-1}\underline{k}$,

$$|\underline{v},\underline{p},\{e\} n_3 n_2\rangle \equiv |p_3 p_2,\{e\} n_3 n_2\rangle \quad , \tag{14a}$$

$$|L_{\Lambda}\underline{v},\underline{p},\Lambda\{e\} n_3 n_2\rangle = |p_3 p_2,\Lambda\{e\} n_3 n_2\rangle \quad , \tag{14b}$$

$$|R_{\Lambda}^{-1}\underline{v},\Lambda^{-1}\underline{p},\{e\} n_3 n_2\rangle = |\Lambda^{-1}\underline{p}_3,\Lambda^{-1}\underline{p}_2,\{e\} n_3 n_2\rangle \quad . \tag{14c}$$

Avec ces notations la loi (3) de transformation des états standard

à deux particules s'écrit

$$U(\Lambda)\,|\,R_\Lambda^{-1}\,\underline{v},\Lambda^{-1}\underline{p},\{e\}n_3n_2\rangle = |\,L_\Lambda\underline{v},\underline{p},\Lambda\{e\}\;n_3n_2\rangle$$
$$= |\,\underline{v}\;\underline{p},\{e\}n_3'n_2'\rangle\; D^{s_3}(R_\Lambda)^{n_3'}{}_{n_3}\; D^{s_2}(R_\Lambda)^{n_2'}{}_{n_2}\;. \qquad (15)$$

12.3-Etats canoniques à deux particules

Les relations (2-25) et (15) montrent que les états définis par

$$|\,\underline{v},\underline{p},\{e\}S\sigma\rangle = |\,\underline{v},\underline{p},\{e\}n_3n_2\rangle\langle s_3n_3s_2n_2|\,S\sigma\rangle\;, \qquad (16a)$$

$$|\,L_\Lambda\underline{v},\underline{p},\Lambda\{e\}S\sigma\rangle = |\,L_\Lambda\underline{v},\underline{p},\Lambda\{e\}n_3n_2\rangle\langle s_3n_3s_2n_2|\,S\sigma\rangle\;, \qquad (16b)$$

$$|\,R_\Lambda^{-1}\underline{v},\Lambda^{-1}\underline{p},\{e\}S\sigma\rangle = |\,R_\Lambda^{-1}\underline{v},\Lambda^{-1}\underline{p},\{e\}n_3n_2\rangle\langle s_3n_3s_2n_2|\,S\sigma\rangle\;, \qquad (16c)$$

se transforment suivant la loi

$$U(\Lambda)|\,R_\Lambda^{-1}\underline{v},\Lambda^{-1}\underline{p},\{e\}S\sigma\rangle = |\,L_\Lambda\underline{v},\underline{p},\Lambda\{e\}n_3n_2\rangle\;,$$
$$= |\,\underline{v},\underline{p},\{e\}\;S\sigma'\rangle\; D^S(R_\Lambda)^{\sigma'}{}_\sigma\;. \qquad (17)$$

Pour extraire la dépendance en $\underline{v}$ de ces états, on peut les projeter sur les harmoniques sphériques scalaires

$$|\,\underline{v},\underline{p},\{e\}\;S\sigma\rangle = \sum_{\ell,m}|\,\underline{p}\;\{e\}\ell mS\sigma\rangle\; Y_m^\ell\,(\underline{v},\{e\})^*\;, \qquad (18a)$$

$$|L_\Lambda\underline{v},\underline{p},\Lambda\{e\}S\sigma\rangle = \sum_{\ell,m}|\,\underline{p},\Lambda\{e\}\ell mS\sigma\rangle\; Y_m^\ell(L_\Lambda\underline{v},\Lambda\{e\})^*\;, \qquad (18b)$$

$$|R_\Lambda^{-1}\underline{v},\Lambda^{-1}\underline{p},\{e\}S\sigma\rangle = \sum_{\ell,m}|\Lambda^{-1}\underline{p},\{e\}\ell mS\sigma\rangle\; Y_m^\ell(R_\Lambda^{-1}\underline{v},\{e\})^*\;. \qquad (18c)$$

Les harmoniques intervenant dans ces expressions sont reliées par

$$Y_m^\ell(R_\Lambda^{-1}\underline{v},\{e\}) = Y_m^\ell(L_\Lambda\underline{v},\Lambda\{e\}) = Y_{m'}^\ell(\underline{v},\{e\})D^\ell(R_\Lambda)^{m'}{}_m\;, \qquad (19)$$

il en résulte, pour les états définis en (18), la loi de transformation

$$U(\Lambda)|\,\Lambda^{-1}\underline{p},\{e\}\ell mS\sigma\rangle = |\,\underline{p},\;\Lambda\{e\}\ell mS\sigma\rangle\;, \qquad (20)$$
$$= |\,\underline{p},\{e\}\ell m'S\sigma'\rangle\; D^\ell(R_\Lambda)^{m'}{}_m\; D^S(R_\Lambda)^{\sigma'}{}_\sigma\;,$$

i.e, ils ne sont pas irréductibles. On construit alors les états canoniques à deux particules en réduisant les produits tensoreils de représentations. Les états canoniques sont définis par

$$|\,J\ell S\;\{p\}_e N\rangle = |\,\underline{p},\{e\}\ell mS\sigma\rangle\langle\ell mS\sigma|\,JN\rangle\;, \qquad (21a)$$

$$|\,J\ell S\;\{p\}^\Lambda_e N\rangle = |\,\underline{p},\Lambda\{e\}\ell mS\sigma\rangle\langle\ell mS\sigma|\,JN\rangle\;, \qquad (21b)$$

$$|\,J\ell S\;\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e} N\rangle = |\,\Lambda^{-1}\underline{p},\{e\}\ell mS\sigma\rangle\langle\ell mS\sigma|\,JN\rangle \qquad (21c)$$

et ils se transforment suivant la loi

$$\boxed{U(\Lambda)\,|J\ell S\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e}N\rangle = |J\ell S\{p\}^{\Lambda}_{e}N\rangle = |J\ell S\{p\}_{e}N'\rangle\, D^{J}(R_{\Lambda})^{N'}{}_{N}} \qquad (22)$$

L'orthogonalité des coefficients-CG et des harmoniques sphériques permettent d'inverser les relations (16) et (18), on obtient

$$|\underline{v},\underline{p},\{e\}n_3n_2\rangle = |\underline{v},\underline{p},\{e\}S\sigma\rangle\langle S\sigma|s_3n_3s_2n_2\rangle \qquad (23)$$

$$|\underline{p},\{e\}\ell mS\sigma\rangle = \int Y^{\ell}_{m}(\underline{v},\{e\})|\underline{v},\underline{p},\{e\}S\sigma\rangle\, d\Omega(\underline{v},\{e\}) \qquad (24)$$

Finalement, le passage des états standard aux états canoniques s'écrit

$$\boxed{|\{p_3\}_{e}n_3\rangle\otimes|\{p_2\}_{e}n_2\rangle = \sum_{J\ell S} Y^{\ell}_{m}(\underline{v},\{e\})^{*}\,|J\ell S\{p\}_{e}N\rangle\langle JN|\ell m\, S\sigma\rangle\langle S\sigma|s_3n_3s_2n_2\rangle} \qquad (25)$$

ou inversement

$$\boxed{|J\ell S\{p\}_{e}N\rangle = \int Y^{\ell}_{m}(\underline{v},\{e\})|\{p_3\}_{e}n_3\rangle\otimes|\{p_2\}_{e}n_2\rangle\, d\Omega(\underline{v},\{e\})\,\langle s_3n_3s_2n_2|S\sigma\rangle\langle\ell mS\sigma|JN\rangle} \qquad (26)$$

12.4-Action de la parité et du renversement du temps sur les états canoniques

La loi de transformation par parité des états standard à une particule (8-40), nous permet d'écrire

$$U(P)\,(|\{p_3\}_{e}n_3\rangle\otimes|\{p_2\}_{e}n_2\rangle) = \epsilon_2\epsilon_3|\{Pp_3\}_{e}n_3\rangle\otimes|\{Pp_2\}_{e}n_2\rangle \qquad (27)$$

L'état du membre de droite peut être paramétré par les quadrivecteurs $P\underline{p}$ et $P\underline{k}$ ou par $P\underline{p}$ et le quadrivecteur $\underline{v}^{P}$ défini par

$$\underline{v}^{P} = L^{-1}(Pp)\,P\underline{k} = P\underline{v}\ , \qquad (28)$$

où l'on a utilisé les équations (13a) et (8-7a).

En développant les deux membres de (27) suivant (25) on obtient

$$U(P)\,Y^{\ell}_{m}(\underline{v},\{e\})^{*}\,|J\ell S\{p\}_{e}N\rangle = \epsilon_2\epsilon_3 Y^{\ell}_{m}(P\underline{v},\{e\})^{*}\,|J\ell S\{Pp\}_{e}N\rangle\ , \qquad (29)$$

et la loi de transformation par parité des harmoniques scalaires (6-24) permet de déduire

$$\boxed{U(P)\,|J\ell S\{p\}_{e}N\rangle = \epsilon_2\epsilon_3(-1)^{\ell}\,|J\ell S\{Pp\}_{e}N\rangle} \qquad (30)$$

On obtient la loi de transformation par renversement du temps du produit tensoriel d'états standard à une particule à l'aide de

l'équation (8-41)

$$U(T)(|\{p_3\}_e n_3\rangle \otimes |\{p_2\}_e n_2\rangle) = (-1)^{s_3+n_3+s_2+n_2} |\{Pp_3\}_e -n_3\rangle \otimes |\{Pp_2\}_e -n_2\rangle \quad (31)$$

Développons le membre de droite de l'expression précédente sur les états canoniques suivant l'équation (25), il vient

$$|\{Pp_3\}_e -n_3\rangle \otimes |\{Pp_2\}_e -n_2\rangle = \sum_{J\ell S} \langle JN|\ell m S\sigma\rangle\langle S\sigma|s_3 -n_3 s_2 -n_2\rangle$$
$$Y_m^{\ell}(P\underline{v},\{e\})^* |J\ell S\{Pp\}_e N\rangle \quad . \quad (32)$$

En utilisant les symétries des coefficients-CG et des harmoniques sphériques, on obtient

$$|\{Pp_3\}_e -n_3\rangle \otimes |\{Pp_2\}_e -n_2\rangle = \sum_{J\ell S} \langle JN|\ell m S\sigma\rangle\langle S\sigma|s_3 n_3 s_2 n_2\rangle$$
$$(-1)^{J+N} Y_m^{\ell}(\underline{v},\{e\})|J\ell S\ \{Pp\}_e -N\rangle \quad (33)$$

L'identification avec le développement du membre de gauche de l'équation (31) donne

$$U(T)\ Y_m^{\ell *}(v,\{e\})|J\ell S\ \{p\}_e N\rangle = (-1)^{J+N}\ Y_m^{\ell}(v,\{e\})|J\ell S\{Pp\}_e -N\rangle \quad (34)$$

ce qui, compte tenu de l'antilinéarité de l'opérateur U(T), conduit à la condition

$$\boxed{U(T)|J\ell S\ \{p\}_e N\rangle = (-1)^{J+N}|J\ell S\ \{Pp\}_e -N\rangle} \quad (35)$$

13 - FONCTIONS DE VERTEX REDUITES A DEUX PARTICULES FINALES

Cette section est consacrée à la généralisation de la notion de fonctions de vertex dans le cas où on considère deux particules dans l'état final. Nous définissons d'abord les fonctions de vertex standard à deux particules finales que nous paramétrons dans un référentiel arbitraire. Ensuite en utilisant les états canoniques à deux particules nous construisons les fonctions réduites dont les lois de transformation, dans un changement de référentiel sont particulièrement simples. Enfin nous établissons les contraintes sur ces fonctions, résultant de l'invariance par parité ou par renversement du temps.

13.1-Fonctions de vertex standard à deux particules finales

Considérons une particule initiale 1 de spin s_1 et d'impulsion $\underline{p}_1$ t deux particules finales 2 et 3 de spins s_2, s_3 et d'impulsions $\underline{p}_2$ et $\underline{p}_3$. i 1 est un fermion, 2 est aussi un fermion et 3 un boson, tandis que si est un boson, 2et 3 sont soit 2 bosons soit 2 fermions. Les $(2s_1+1)$ $2s_2+1)(2s_3+1)$ fonctions de vertex d'un opérateur tensoriel $_r\underline{A}$ entre les tats de la particule s_1 d'une part et ceux de la particules s_2 et s_3 'autre part sont définies par

$$\underline{A}(\{p_3\},\{p_2\},\{p_1\})^{n_3 n_2}{}_{n_1} = <\{p_3\}n_3|\otimes<\{p_2\}n_2|_r\underline{A}|\{p_1\}n_1> \qquad (1)$$

es fonctions correspondant à des états d'impulsion $\Lambda^{-1}p_i$ $(i = 1,2,3)$ ont définies de la même manière par

$$\underline{A}(\{\Lambda^{-1}p_3\},\{\Lambda^{-1}p_2\},\{\Lambda^{-1}p_1\})^{m_3 m_2}{}_{m_1} = <\{\Lambda^{-1}p_3\}m_3\{\Lambda^{-1}p_2\}m_2|_r\underline{A}|\{\Lambda^{-1}p_1\}m_1> \quad (2)$$

n utilisant les lois de transformation des états (8-35) et de l'opéra- eur (9-1), on déduit celle des fonctions de vertex à deux particules inales

$$\otimes\Lambda^{-1})_r\underline{A}(\{\Lambda^{-1}p_3\},\{\Lambda^{-1}p_2\},\{\Lambda^{-1}p_1\})^{m_3 m_2}{}_{m_1} = {}_r\underline{A}(\{p_3\}\Lambda,\{p_2\}\Lambda,\{p_1\}\Lambda)^{m_3 m_2}{}_{m_1} \quad ,(3)$$

$$= D^{s_3}(R^{-1}_{w_3})^{m_3}{}_{n_3}\ D^{s_2}(R^{-1}_{w_2})^{m_2}{}_{n_2}\ {}_r\underline{A}(\{p_3\},\{p_2\},\{p_1\})^{n_3 n_2}{}_{n_1}\ D^{s_1}(R_{w_1})^{n_1}{}_{m_1} \ .$$

En choisissant comme état initial et final respectivement les états tandard à une et à deux particules,cf.Eq.(8-36),(12-2), on définit les onctions de vertex standard à deux particules finales par

$$\underline{A}(p_3,p_2,p_1,\{e\})^{n_3 n_2}{}_{n_1} = {}_r\underline{A}(\{p_3\}_e,\{p_2\}_e,\{p_1\}_e)^{n_3 n_2}{}_{n_1} \qquad (4a)$$

$$\underline{A}(p_3,p_2,p_1,\Lambda\{e\})^{n_3 n_2}{}_{n_1} = {}_r\underline{A}(\{p_3\}^{\Lambda}_e,\{p_2\}^{\Lambda}_e,\{p_1\}^{\Lambda}_e)^{n_3 n_2}{}_{n_1} \qquad (4b)$$

$$\underline{A}(\Lambda^{-1}p_3,\Lambda^{-1}p_2,\Lambda^{-1}p_1,\{e\})^{n_3 n_2}{}_{n_1} = {}_r\underline{A}(\{\Lambda^{-1}p_3\}_{\Lambda^{-1}e},\{\Lambda^{-1}p_2\}_{\Lambda^{-1}e},\{\Lambda^{-1}p_1\}_{\Lambda^{-1}e})^{n_3 n_2}{}_{n_1} \qquad (4c)$$

a loi de transformation de ces fonctions standard s'écrit

$$\otimes\Lambda^{-1})_r\underline{A}(\Lambda^{-1}p_3,\Lambda^{-1}p_2,\Lambda^{-1}p_1,\{e\})^{n_3 n_2}{}_{n_1} = {}_r\underline{A}(p_3,p_2,p_1,\Lambda\{e\})^{n_3 n_2}{}_{n_1}$$

$$= D^{s_3}(R^{-1}_{\Lambda})^{n_3}{}_{n_3'}\ D^{s_2}(R^{-1}_{\Lambda})^{n_2}{}_{n_2'}\ {}_r\underline{A}(p_3,p_2,p_1,\{e\})^{n_3' n_2'}{}_{n_1'}\ D^{s_1}(R_{\Lambda})^{n_1'}{}_{n_1} \qquad (5)$$

où les arguments des trois matrices sont la même rotation R_Λ .

Les fonctions de vertex standard à deux particules s'expriment à partir des fonctions de vertex dans des tétrades arbitraires par

$$\underset{r}{A}(p_3p_2p_1\ \{e\})^{n_3n_2}_{\quad n_1} = D^{s_3}(L(p_3)^{-1}[p_3])^{n_3}_{\quad m_3} D^{s_2}(L(p_2)^{-1}[p_2])^{n_2}_{\quad m_2}$$
$$\underset{r}{A}(\{p_3\}\{p_2\}\{p_1\})^{m_3m_2}_{\quad m_1}\ D^{s_1}([p_1]^{-1}L(p_1))^{m_1}_{\quad n_1} \qquad (6)$$

13.2-Paramétrisation des fonctions de vertex standard à deux particules finales

Dans une tétrade de référence $\{e\}$, les fonctions de vertex standard à deux particules finales, $\underset{r}{A}(p_3,p_2,p_1,\{e\})^{n_3n_2}_{\quad n_1}$, ne dépendent plus que des trois quadrivecteurs p_3,p_2,p_1. Considérons d'abord les deux quadrivecteurs $\underline{p}_2,\underline{p}_3$. Comme dans la section précédente pour les états à deux particules, nous pouvons paramétrer $\underline{p}_2,\underline{p}_3$ par les deux quadrivecteurs $\underline{p}$ et $\underline{v}$ définis en (12-5 et 11),

$$p = p_2 + p_3 \ , \qquad (7)$$

$$\underline{v} = C\ \{-,e \mid L^{-1}(p)\ \hat{p}_2,e\}, \qquad C = \{\hat{p}_2,\hat{p}_3 \mid \hat{p}_3,\hat{p}_2\}^{-\frac{1}{2}} \qquad (8)$$

Si nous considérons maintenant les impulsions $\underline{p}$ et $\underline{p}_1$, nous nous ramenons à une situation analogue aux fonctions de vertex à une particule finale, la seule différence étant que l'invariant $\underline{p}^2$ n'est pas fixé par une masse. Pour paramétrer $\underline{p}$ et $\underline{p}_1$, nous utilisons donc la même méthode qu'au paragraphe 9-4.

Le quadrivecteur $\underline{e}$ de genre temps des tétrades de référence est toujours dans le 2-plan $(\underline{p},\underline{p}_1)$,

$$\underline{e} \in (\underline{p}_1,\underline{p}) \qquad (9)$$

et pour obtenir une base orthonormée de ce 2-plan, nous construisons un quadrivecteur $\underline{u}$ unitaire de genre espace ($\underline{u}^2 = -1$) et orthogonal à $\underline{e}$ par

$$\underline{u} = N\ \{-,e|\hat{p}_1,\hat{p}\} \quad , \quad N = \{\hat{p},\hat{p}_1|\hat{p}_1,\hat{p}\}^{-\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

Considérons le quadrivecteur $\underline{q}$ défini par

$$\underline{q} = \underline{p} - \underline{p}_1 = \underline{p}_2 + \underline{p}_3 - \underline{p}_1 \qquad (11)$$

La constante N s'exprime en fonction des invariants $\underline{p}^2$ et $\underline{q}^2$ et de la masse M_1 de la particule initiale par

$$N = \frac{2M_1\sqrt{p^2}}{\lambda(\sqrt{q^2},\sqrt{p^2},m_1)} \qquad (12)$$

où la fonction λ est définie en (12-8).

Dans la tétrade de référence $\{e\}$, on paramètre donc les fonctions de vertex standard par les invariants $\underline{p}^2$ et $\underline{q}^2$, et par les quadrivecteurs $\underline{u}$, $\underline{v}$ ou $R_\Lambda^{-1}\underline{u}$, $R_\Lambda^{-1}\underline{v}$,

$$\underline{\underline{r}A}(p^2,q^2,\underline{u},\underline{v},\{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} = \underline{\underline{r}A}(p_3,p_2,p_1,\{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} \qquad (13a)$$

$$\underline{\underline{r}A}(p^2,q^2,R_\Lambda^{-1}\underline{u},R_\Lambda^{-1}\underline{v},\{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} = \underline{\underline{r}A}(\Lambda^{-1}p_3,\Lambda^{-1}p_2,\Lambda^{-1}p_1,\{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} \qquad (13b)$$

Dans une nouvelle tétrade $\Lambda\{e\}$, telle que $\Lambda\underline{e} \in (\underline{p}_1,\underline{p})$, on paramètre les nouvelles fonctions par les mêmes invariants $\underline{p}^2,\underline{q}^2$, et par les nouveaux quadrivecteurs $L_\Lambda\underline{u}$, $L_\Lambda\underline{v}$. Les nouvelles fonctions standard sont notées

$$\underline{\underline{r}A}(p^2,q^2,L_\Lambda\underline{u},L_\Lambda\underline{v},\Lambda\{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} = \underline{\underline{r}A}(p_3p_2p_1,\Lambda\{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} \qquad (13c)$$

et la loi de transformation des fonctions standard s'écrit

$$(\overset{r}{\otimes}\Lambda^{-1})\ \underline{\underline{r}A}(p^2,q^2,R_\Lambda^{-1}\underline{u},R_\Lambda^{-1}\underline{v},\{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} = \underline{\underline{r}A}(p^2,q^2,L_\Lambda\underline{u},L_\Lambda\underline{v},\Lambda\{e\})^{n_3 n_2}_{n_1}$$
$$= D^{s_3}(R_\Lambda^{-1})^{n_3}_{n_3'}\ D^{s_2}(R_\Lambda^{-1})^{n_2}_{n_2'}\ \underline{\underline{r}A}(p^2,q^2,\underline{u},\underline{v},\{e\})^{n_3' n_2'}_{n_1'}\ D^{s_1}(R_\Lambda)^{n_1'}_{n_1} \qquad (14)$$

13.3-Remarque cinématique

Au paragraphe précédent, nous avons paramétré l'ensemble des trois quadrivecteurs $\underline{p}_1,\underline{p}_2,\underline{p}_3$ dans une tétrade de référence $\{e\}$, par deux invariants $\underline{p}^2,\underline{q}^2$ et par deux quadrivecteurs $\underline{u}$ et $\underline{v}$ dont les constantes de normalisation N et C ne font intervenir que les masses des particules et ces mêmes invariants $\underline{p}^2,\underline{q}^2$, cf.Eq.(12-7) et (12). Or à partir de trois quadrivecteurs linéairement indépendants, on peut former trois invariants indépendants. Le troisième invariant est le produit scalaire $\underline{u}.\underline{v}$, le seul que l'on puisse former avec ces deux vecteurs unitaires ($\underline{u}^2 = \underline{v}^2 = -1$). Ce produit scalaire s'exprime en fonction des quadrivecteurs $\underline{p}_1,\underline{p}_2,\underline{p}_3$, sous la forme,

$$\underline{u}.\underline{v} = -\frac{\{p,p_1|p_2,p_3\}}{\sqrt{\{p,p_1|p_1,p\}\{p_2p_3|p_3p_2\}}} \qquad (15)$$

Si on se place dans le centre de masse des particules finales, i.e. on choisit $\underline{e} = \hat{\underline{p}}$, on obtient

$$\underline{u}.\underline{v} = -\cos\theta \qquad (16)$$

où θ est l'angle des impulsions $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ dans ce système (cf.fig 1)

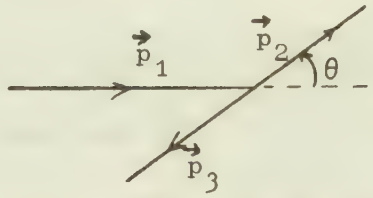

Fig. 1

13.4-Fonctions de vertex réduites à deux particules finales

Les fonctions de vertex canoniques à deux particules finales sont définies à l'aide des états canoniques à deux particules (12-21) et des états standard de la particule initiale par

$$\underset{r}{\underline{A}}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{N}_{n_1} = \langle J\ell S,\{p\}_e N|\underset{r}{\underline{A}}|\{p_1\}_e n_1\rangle \qquad (17a)$$

$$\underset{r}{\underline{A}}^{J\ell S}(p^2,q^2,R^{-1}_{\Lambda}\underline{u},\{e\})^{N}_{n_1} = \langle J\ell S,\{\Lambda^{-1}p\}_{\Lambda^{-1}e}|\underset{r}{\underline{A}}|\{\Lambda^{-1}p_1\}_{\Lambda^{-1}e} n_1\rangle \qquad (17b)$$

La loi de transformation des états canoniques (12-22), permet d'obtenir la loi de transformation de ces fonctions canoniques

$$(\overset{r}{\otimes}\Lambda^{-1})\,\underset{r}{\underline{A}}^{J\ell S}(p^2,q^2,R^{-1}_{\Lambda}\underline{u},\{e\})^{N}_{n_1} = \underset{r}{\underline{A}}^{J\ell S}(p^2,q^2,L_{\Lambda}\underline{u},\Lambda\{e\})^{N}_{n_1}$$

$$= D^{J}(R^{-1}_{\Lambda})^{N}_{M}\,\underset{r}{\underline{A}}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{M}_{m_1}\,D^{s_1}(R_{\Lambda})^{m_1}_{n_1} \qquad (18)$$

cette loi est identique à celle des fonctions de vertex standard à une particule finale de spin $s_2 = J$, (cf.Eq.9-14).

Le produit tensoriel de représentations intervenant dans la relation précédente peut être réduit à l'aide des coefficients-CG. Alors, les fonctions de vertex réduites, à deux particules finales, définies par

$$\underset{r}{\underline{A}}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L^*}_{M} = \frac{2L+1}{2J+1}\langle LMs_1n_1|JN\rangle\,\underset{r}{\underline{A}}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{N}_{m_1} \qquad (19a)$$

$$\underset{r}{\underline{A}}^{J\ell S}(p^2,q^2,R^{-1}_{\Lambda}\underline{u},\{e\})^{L^*}_{M} = \frac{2L+1}{2J+1}\langle LMs_1n_1|JN\rangle\,\underset{r}{\underline{A}}^{J\ell S}(p^2,q^2,R^{-1}_{\Lambda}\underline{u},\{e\})^{N}_{m_1} \qquad (19b)$$

se transforment suivant une loi identique à celle des fonctions réduites pour une particule finale (9-36),

$$(\overset{r}{\otimes}\Lambda^{-1})\,\underset{r}{\underline{A}}^{J\ell S}(p^2,q^2,R^{-1}_{\Lambda}\underline{u},\{e\})^{L}_{M} = \underset{r}{\underline{A}}^{J\ell S}(p^2,q^2,L_{\Lambda}\underline{u},\Lambda\{e\})^{L}_{M} \qquad (20)$$

$$= \underset{r}{\underline{A}}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L}_{M'}\,D^{L}(R_{\Lambda})^{M'}_{M}\ .$$

Dans les cas particuliers où la transformation de Lorentz Λ est une rotation du petit groupe de $\underline{e}$, ou une transformation pure L, l'expression

précédente devient

$$(\overset{r}{\otimes} R)\,{}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,R^{-1}\underline{u},\{e\})^L_M = {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},R\{e\})^L_M \qquad (21)$$

$$= {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^L_{M'}\, D^L(R)^{M'}_M$$

$$(\overset{r}{\otimes} L)\,{}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^L_M = {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,L\underline{u},L\{e\})^L_M W\,, \qquad (22)$$

$$= {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^L_M\,.$$

Cette dernière expression montre que les fonctions de vertex réduites sont inchangées quand on fait agir une transformation de Lorentz pure sur la tétrade de référence.

En utilisant les relations (12-21,8 et 14) on déduit la relation entre les fonctions standard et réduites. Il vient

$$\boxed{{}_r\underline{A}(p^2,q^2,\underline{u},\underline{v},\{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} = \sum_{J\ell SL} Y^\ell_m(\underline{v},\{e\})\langle s_3 n_3 s_2 n_2|S\sigma\rangle\langle \ell m\, S\sigma|JN\rangle \langle JN|LMs_1 n_1\rangle\, {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^L_M \quad (23)}$$

et inversement on a

$$\boxed{{}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_M = \frac{2L+1}{2J+1}\int Y^\ell_m(\underline{v},\{e\})^*\, {}_r\underline{A}(p^2,q^2,\underline{u},\underline{v},\{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} d\Omega(\underline{v},\{e\})\,\langle LMs_1 n_1|JN\rangle\langle JN|\ell m S\sigma\rangle\langle S\sigma|s_3 n_3 s_2 n_2\rangle \qquad (24)}$$

Un cas particulier intéressant est $s_3 = 0$ qui correspond physiquement à la production de mésons π par exemple. Dans ce cas, le premier coefficient-CG de la formule (23) disparait, et on omet l'indice $S = s_2$ dans la notation des fonctions réduites. En outre, pour les plus petites valeurs de spins initiaux, $s_1 = 0$ pour les bosons et $s_1 = \frac{1}{2}$ pour les fermions, nous pouvons effectuer la sommation sur L et calculer explicitement le dernier coefficient-CG de l'équation (23). On obtient

Bosons $s_1 = s_3 = 0$ (J entier)

$$ {}_r\underline{A}(p^2,q^2,\underline{u},\underline{v},\{e\})^{n_2} = \sum_{\ell JM} Y^{\ell}_m(\underline{v},\{e\}) \langle \ell m s_2 n_2 | JM \rangle \, {}_r\underline{A}^{J\ell}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{J\,*}_M \qquad (25) $$

Fermions $s_1 = ½$, $s_3 = 0$ (J demi-entier impair)

$$ {}_r\underline{A}(p^2,q^2,\underline{u},\underline{v},\{e\})^{n_2}_{\pm ½} = \sum_{\ell JM} Y^{\ell}_m(\underline{v},\{e\}) \langle \ell m s_2 n_2 | J, M \pm ½ \rangle $$

$$ \left\{ \sqrt{\frac{J+½\mp M}{2J}} \; {}_r\underline{A}^{J\ell}(p^2,q^2,\underline{u},\underline{v},\{e\})^{J-½\,*}_M \mp \sqrt{\frac{J+½\pm M}{2J+2}} \; {}_rA^{J\ell}(p^2,q^2,\underline{u},\underline{v},\{e\})^{J+½\,*}_M \right\} \qquad (26) $$

13.5-Conséquences de l'invariance par parité et par renversement du temps sur les fonctions réduites

Considérons d'abord l'invariance par parité. En utilisant les lois de transformation de l'opérateur (9-2) des états standard à une particule (8-40) et des états canoniques à deux particules (12-30), nous obtenons la relation

$$ {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{N}_{n_1} = (-1)^{\ell} \epsilon\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \, (\overset{r}{\otimes} P) \; {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,P\underline{u},\{e\})^{N}_{n_1} \qquad (28) $$

où ϵ , ϵ_i (i = 1,2,3) sont les parités intrinsèques de l'opérateur et des particules. En utilisant les définitions (19) des fonctions réduites, on déduit

$$ {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_M = (-1)^{\ell} \epsilon\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \, (\overset{r}{\otimes} P) \; {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,P\underline{u},\{e\})^{L\,*}_M \qquad (29) $$

Etudions ensuite l'invariance par renversement du temps. Les équations (9-3),(8-41) et (12-35) impliquent la condition

$$ {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{N}_{n_1} = \epsilon_T (-1)^{S-s_1+N-n_1} \, (\overset{r}{\otimes} T) \; {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,P\underline{u},\{e\})^{-N\,*}_{-n_1} \qquad (30) $$

Les propriétés de symétrie des coefficients-CG et les définitions (19) entrainent

$$ {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_M = \epsilon_T (-1)^{L+M} \, (\overset{r}{\otimes} T) \; {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,P\underline{u},\{e\})^{L}_{-M} \qquad (31) $$

14 - DEVELOPPEMENT MULTIPOLAIRE DES FONCTIONS DE VERTEX A DEUX PARTICULES FINALES

Les méthodes exposées aux sections 10 et 11 sont utilisées pour développer les fonctions de vertex réduites, à deux particules finales,

sur les harmoniques sphériques tensorielles et sur les multipoles tensoriels. Nous définissons ainsi les facteurs de forme et les facteurs de forme multipolaires qui ne dépendent que des invariants $\underline{p}^2$ et $\underline{q}^2$ et du choix du quadrivecteur $\underline{e}$ dans le 2-plan $(\underline{p},\underline{p}_1)$. Ensuite nous quantifions en hélicité et nous obtenons le développement multipolaire des composantes sphériques des fonctions de vertex standard sur les fonctions de Legendre associées P_m^ℓ, et nous étudions les règles de sélection imposées aux facteurs de forme par la conservation de la parité et par l'invariance par renversement du temps.

14.1- Facteurs de forme

Dans une rotation de la tétrade de référence, les fonctions de vertex réduites ${}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^L_M$ se transforment de la même manière que les harmoniques sphériques tensorielles, cf.Eq.(13-20),(6-38). Elles peuvent donc être développées sur cette base avec des coefficients invariants par rotation

$$ {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_M = \sum_{\ell'} \sum_{\ell_r \cdot j_r} F^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{e})^{\ell'\ell_r j_r L}\, {}_r\underline{Y}^{\ell'\ell_r j_r L}(\underline{u},\{e\})^{L\,*}_M \qquad (1) $$

Les coefficients $F^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{e})^{\ell'\ell_r j_r L}$ sont appelés facteurs de forme des fonctions de vertex à deux particules finales et ne dépendent plus que des invariants $\underline{p}^2$ et $\underline{q}^2$, et du choix du quadrivecteur $\underline{e}$ dans le 2-plan $(\underline{p},\underline{p}_1)$.

En utilisant la relation d'orthonormalité (6-26) des harmoniques sphériques tensorielles on peut inverser la définition (1) des facteurs de forme

$$ F^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{e})^{\ell'\ell_r j_r L} = (-1)^j \int {}_r\underline{Y}^{\ell'\ell_r j_r}(\underline{u},\{e\})^L_M\,(r.)\; {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_M \, d\Omega(\underline{u},\{e\}) \qquad (2) $$

Dans la suite quand il n'y aura aucune ambiguité, nous omettrons la tétrade de référence $\{e\}$ et le quadrivecteur $\underline{e}$ dans la notation des fonctions de vertex et des facteurs de forme.

En multipliant scalairement la définition (1) par un tenseur de

base sphérique, on construit les composantes sphériques, cf.Eq.(6-11), des fonctions de vertex réduites et on obtient le développement en facteurs de forme de ces composantes sur les harmoniques scalaires

$$\left[A^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u})^{L\,*}_{M}\right]^{\ell_r\, j_r}_{n} = \sum_{\ell' m'} \langle LM|\ell' m' \ell_r n\rangle\, F^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell' \ell_r j_r L}\, Y^{\ell'}_{m'}(\underline{u})^{*} \qquad (3)$$

Les relations (13-23), (1) et (3) permettent d'obtenir les développements en facteurs de forme des fonctions de vertex standard à deux particules finales

$$_r\underline{A}(p^2,q^2,\underline{u},\underline{v})^{n_3\, n_2}_{n_1} = \sum_{\substack{J\ell S\\ \ell' L}} \sum_{\ell_r .. j_r} \langle s_3 n_3 s_2 n_2|S\sigma\rangle\langle \ell m S\sigma|JN\rangle\langle JN|LM s_1 n_1\rangle \; F^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell' \ell_r j_r L}\, Y^{\ell}_{m}(\underline{v})\; {}_r\underline{Y}^{\ell' \ell_r j_r}(\underline{u})^{L\,*}_{M} \qquad (4)$$

et de leurs composantes sphériques

$$\left[A(p^2,q^2,\underline{u},\underline{v})^{n_3\, n_2}_{n_1}\right]^{\ell_r\, j_r}_{n} = \sum_{J\ell SL} \sum_{\ell' m'} \langle s_3 n_3 s_2 n_2|S\sigma\rangle\langle \ell m S\sigma|JN\rangle \langle JN|LM s_1 n_1\rangle\langle LM|\ell' m' \ell_r n\rangle\, F^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell' \ell_r j_r L}\, Y^{\ell}_{m}(\underline{v})\; Y^{\ell'}_{m'}(\underline{u})^{*} \qquad (5)$$

14.2-Facteurs de forme multipolaires

Les multipoles tensoriels se transforment de la même manière que les harmoniques tensorielles, cf.Eq.(7-21), et ils peuvent servir de base pour développer les fonctions de vertex réduites, à deux particules finales. Les facteurs de forme multipolaires, coefficients de ce développement, sont définis par

$$\boxed{{}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_{M} = \sum_{\mu} \sum_{\ell_r .. j_r} G^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{e})^{\ell_r\, j_r}_{\mu}\; {}_r\underline{X}^{\ell_r\, j_r}_{\mu}(\underline{u},\{e\})^{L\,*}_{M}} \qquad (6)$$

et en inversant cette définition à l'aide de l'orthonormalité (7-2) des multipoles, on obtient

$$G^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{e})^{\ell_r\, j_r\, L}_{\mu} = (-1)^{j} \int {}_r\underline{X}^{\ell_r\, j_r}_{\mu}(\underline{u},\{e\})^{L}_{M}\; (^{r}_{\cdot})\; {}_r\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_{M}\; d\Omega(\underline{u},\{e\}) \qquad (7)$$

Il résulte de la définition des multipoles (7-1) que les facteurs de forme multipolaires sont des combinaisons linéaires orthonormées des facteurs de forme, les coefficients de ces combinaisons étant les mêmes qu'en (11-3). Comme les facteurs de forme, les facteurs de forme multipo

multipolaires sont invariants par rotation de la tétrade de référence et ne dépendent que des invariants $\underline{p}^2$ et $\underline{q}^2$ et du choix qu quadrivecteur $\underline{e}$ dans le 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p})$. L'intérêt des facteurs de forme multipolaires réside dans le fait que, dans le cas d'un opérateur quadrivectoriel, ils sont eux-mêmes irréductibles dans les transformations de Lorentz pures de la tétrade de référence, (cf.§7-4), et que dans le cas d'un opérateur tensoriel, ils permettent de construire les facteurs de forme irréductibles, (cf.§7-5).

En multipliant scalairement la relation (6) par un tenseur de base sphérique, on déduit le développement multipolaire des composantes sphériques des fonctions de vertex réduites sur les harmoniques scalaires. Ce développement peut se mettre sous la forme

$$\left[A^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u})^{L}_{M}\right]^{*\,\ell_r\, j_r}_{n} = \sum_{\mu\geq 0}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\delta_{\mu 0}} \sum_{\ell' m'} \langle \ell' 0 | \ell_r \mu L-\mu \rangle \langle LM | \ell' m' \ell_r n\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[G^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell_r\, j_r\, L}_{\mu} + G^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell_r\, j_r\, L}_{-\mu} + (-1)^{\ell'+L}\left(G^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell_r\, j_r\, L}_{\mu} - G^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell_r\, j_r\, L}_{-\mu}\right)\right] Y^{\ell'}_{m'}(\underline{u})^{*} \qquad (8)$$

Les relations (13-23) et (6) permettent d'obtenir les développements multipolaires des fonctions de vertex standard à deux particules finales

$$\underline{A}(p^2,q^2,\underline{u},\underline{v})^{n_3\, n_2}_{\ n_1} = \sum_{\substack{J\ell S\\ \mu LM}} \sum_{\ell_r \ldots j_r} \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S\sigma \rangle \langle \ell m S\sigma | JN \rangle \langle JN | LM s_1 n_1 \rangle$$

$$G^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell_r\, j_r\, L}_{\mu}\ Y^{\ell}_{m}(\underline{v})\ \underline{X}^{\ell_r\, j_r}_{r\,-\mu}(\underline{u})^{L}_{M}{}^{*} \qquad (9)$$

et de leurs composantes sphériques

$$\left[A(p^2,q^2,\underline{u},\underline{v})^{n_3\, n_2}_{\ n_1}\right]^{\ell_r\, j_r}_{n} = \sum_{J\ell SL} \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S\sigma \rangle \langle \ell m S\sigma | JN \rangle \langle JN | LM s_1 n_1 \rangle \qquad (10)$$

$$\sum_{\ell' m'} \langle LM | \ell' m' \ell_r n\rangle \sum_{\mu\geq 0}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\delta_{\mu 0}} \langle \ell' 0 | \ell_r \mu L-\mu\rangle\ Y^{\ell}_{m}(\underline{v})\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left[G^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell_r\, j_r\, L}_{\mu} + G^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell_r\, j_r\, L}_{-\mu} + (-1)^{\ell'+L}\left(G^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell_r\, j_r\, L}_{\mu} - G^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell_r\, j_r\, L}_{-\mu}\right)\right] Y^{\ell'}_{m'}(\underline{u})^{*}$$

Ces développements multipolaires sont des généralisations pour des spins arbitraires et des opérateurs d'ordre quelconque des développements

effectués par plusieurs auteurs [C.G.L.N.57],[GoWa64],[Mo.St.66],[Ad168] adoptent un point de vie légèrement différent. En effet ils font un développement multipolaire de l'amplitude de diffusion dans des réactions à deux corps.

14.3-Quantification en hélicité dans le cas de deux particules finales

Quand on quantifie en hélicité,cf.(9-45), on choisit $\underline{e}_3 = \underline{u}$, et la dépendance en $\underline{u}$ disparait. Mais dans le cas de deux particules finales, les trois impulsions $\underline{p}_1,\underline{p}_2,\underline{p}_3$ sont a priori linéairement indépendantes, et définissent donc un 3-plan.

La normale $\underline{n}$, $(\underline{n}^2 = -1)$, à ce 3-plan est

$$\underline{n} = N\{-,p_1,p_2,p_3\} \quad , \quad N^{-1/2} = -\{p_1,p_2,p_3|\,p_1,p_2,p_3\} \qquad (11)$$

où l'on a utilisé la notation,

$$\{a,b,c\,|\,A,B,C\} = \{-,a,b,c\}\,.\,\{-,A,B,C\} = -\begin{vmatrix} \underline{a}.\underline{A} & \underline{a}.\underline{B} & \underline{a}.\underline{C} \\ \underline{b}.\underline{A} & \underline{b}.\underline{B} & \underline{b}.\underline{C} \\ \underline{c}.\underline{A} & \underline{c}.\underline{B} & \underline{c}.\underline{C} \end{vmatrix} \qquad (12)$$

On appelle tétrade d'hélicité une tétrade $\{e\}^H$ telle que

$$\underline{e}_3^H = \underline{u} \quad \text{et} \quad \underline{e}_2^H = \underline{n} \quad . \qquad (13)$$

Dans cette tétrade, les harmoniques de $\underline{u}$ et de $\underline{v}$ deviennent

$$Y_m^\ell(\underline{u},\{e\}^H) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\ \delta_{mo} \quad , \qquad (14)$$

$$Y_m^\ell(\underline{v},\{e\}^H) \equiv Y_m^\ell(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\ \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\ P_m^\ell(x) \qquad (15)$$

où les P_m^ℓ sont les fonctions de Legendre associées et où l'on a posé

$$x = -\,\underline{u}.\underline{v} \qquad (16)$$

La relation (15) résulte de l'orthogonalité des quadrivecteurs $\underline{v}$ et $\underline{n}$.

Les relations (13-23) et (15) permettent d'écrire la relation de passage entre les composantes des fonctions de vertex standard et réduit en hélicité ,

$$\left[A(p^2,q^2,x)^{n_3 n_2}_{\ n_1}\right]^{\ell_r\, j_r}_{n} = \sum_{J\ell SL} \langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S\sigma\rangle\ Y_m^\ell(x) \langle \ell m S\sigma\,|\,JN\rangle$$

$$\langle JN|Lns_1 n_1\rangle \left[A^{J\ell S}(p^2,q^2,e_3)^{L\,*}\right]^{\ell_r\, j_r}_{n} \qquad (17)$$

Remarquons que les symétries des coefficients-CG imposent une condition

ur les indices magnétiques

$$m = n + n_1 - n_2 - n_3 \qquad (18)$$

Dans le cas particulier $s_3 = 0$, la sommation sur $S = s_2$ disparait t pour $s_1 = 0$ ou ½, on peut effectuer la sommation sur L. En utilisant es formules (13-25,26) on obtient

Bosons $s_1 = s_3 = 0$ (J entier)

$$A(p^2,q^2,x)^{n_2}\big]_n^{\ell_r j_r} = \sum_{\ell,J} Y_m^{\ell}(x) \langle \ell m s_2 n_2 | JN \rangle \big[A^{J\ell}(p^2,q^2,e_3)^{J\,*}\big]_n^{\ell_r j_r} \qquad (19)$$

Fermions $s_1 = ½$, $s_3 = 0$ (J demi-entier impair)

$$A(p^2,q^2,x)^{n_2}{}_{\pm½}\big]_n^{\ell_r j_r} = \sum_{\ell,J} Y_m^{\ell}(x) \langle \ell m s_2 n_2 | J\ n\pm½ \rangle \qquad (20)$$

$$\sqrt{\frac{J+½\pm n}{2J}}\big[A^{J\ell}(p^2,q^2,e_3)^{J-½\,*}\big]_n^{\ell_r j_r} \mp \sqrt{\frac{J+½\mp n}{2J+2}}\big[A^{J\ell}(p^2,q^2,e_3)^{J+½\,*}\big]_n^{\ell_r j_r}\Big\}$$

En hélicité, le développement en facteurs de forme (3) des compo- antes sphériques des fonctions réduites devient

$$A^{J\ell S}(p^2,q^2,e_3)^{L\,*}\big]_n^{\ell_r j_r} = \sum_{\ell'} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi}} \langle Ln | \ell' 0 \ell_r n \rangle\ F^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell' \ell_r j_r L} \qquad (21)$$

e même le développement multipolaire (8) se simplifie,car on peut effec- uer les sommations sur ℓ' et μ, on obtient

$$A^{J\ell S}(p^2,q^2,e_3)^{L*}\big]_o^{\ell_r j_r L} = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}\ G^{J\ell S}(p^2,q^2)_o^{\ell_r j_r L} \qquad (22a)$$

$$A^{J\ell S}(p^2,q^2,e_3)^{L*}\big]_n^{\ell_r j_r} = (-1)^n \sqrt{\frac{2L+1}{8\pi}}\ (G^{J\ell S}(p^2,q^2)_n^{\ell_r j_r L} - G^{J\ell S}(p^2,q^2)_{-n}^{\ell_r j_r L}) \qquad n > 0 \qquad (22b)$$

$$A^{J\ell S}(p^2,q^2,e_3)^{L*}\big]_{-n}^{\ell_r j_r} = (-1)^{\ell_r+n} \sqrt{\frac{2L+1}{8\pi}}\ (G^{J\ell S}(p^2,q^2)_n^{\ell_r j_r L} + G^{J\ell S}(p^2,q^2)_{-n}^{\ell_r j_r L}) \qquad (22c)$$

$$, n > 0$$

omme nous l'avions remarqué pour les fonctions de vertex à une particule inale, le développement en facteurs de forme multipolaires (22) est plus imple que le développement en facteur de forme (21) car il n'y a plus ucune sommation à effectuer.

14.4-Règles de sélection dues à la parité

Si l'opérateur $\underset{r}{A}$ a une parité ϵ donnée, à l'aide des lois de

transformation par parité des états standard à une particule (8-40) et de états canoniques à deux particules (12-30) on obtient par la même méthode qu'au §10-3, une règle de sélection sur les facteurs de forme

$$F^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell'\ell_r j_r L} = (-1)^{\ell'+j+\ell}\,\epsilon\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\,F^{J\ell s}(p^2,q^2)^{\ell'\ell_r j_r L} \qquad (23)$$

On en déduit les règles de sélection sur les facteurs de forme multipolaires. Ce sont

$$G^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell_r j_r L}_{o} = (-1)^{\ell_r+j+\ell+L}\,\epsilon\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\,G^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell_r j_r L}_{o} \qquad (24a)$$

$$G^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell_r j_r L}_{\pm\mu} = \pm\,(-1)^{j+\ell+L}\,\epsilon\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\,G^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell_r j_r L}_{\pm\mu},\ \mu>0 \qquad (24b)$$

cette dernière relation entraine que pour ℓ, L, ℓ_r, j_r fixés soit les facteurs de forme multipolaires à μ positif, soit ceux à μ négatifs sont nul

En portant la condition (23) dans l'équation (17) on obtient une règle de sélection sur les composantes sphériques des fonctions de vertex réduites, en hélicité,

$$[A^{J\ell S}(p^2,q^2,e_3)^{L^*}]^{\ell_r\ell_r}_{n} = (-1)^{\ell_r+j+\ell+L}\,\epsilon\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\,[A^{J\ell S}(p^2,q^2,e_3)^{L^*}]^{\ell_r j_r}_{-n} \qquad (25)$$

et on en déduit une règle de sélection sur les composantes des fonctions de vertex standard, toujours en hélicité,

$$[A(p^2,q^2,\underline{u},\underline{v},\{e\}^{H})^{n_3 n_2}_{n_1}]^{\ell_r j_r}_{n} = \epsilon\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\,(-1)^{j+\ell_r+s+s_2-s_1}\,[A(p^2,q^2,\underline{u},\underline{v},\{e\}^{H})^{-n_3-n_2}_{-n_1}]^{\ell_r j_r}_{-n} \qquad (26)$$

14.5-Règles de sélection dues au renversement du temps

Si l'opérateur $_r\underline{A}$ se transforme dans le renversement du temps suivant la relation (9-3) qui définit le signe ϵ_T caractérisant le comportement de l'opérateur, à l'aide des lois de transformation des états standard à une particule, (8-41), et des états canoniques à deux particules (12-35), on obtient par la même méthode qu'au §10-4, la règle de sélection

$$F^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell'\ell_r j_r L} = (-1)^r\,\epsilon_T\,F^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell'\ell_r j_r L\,*} \qquad (27a)$$

$$G^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell_r j_r L}_{\mu} = (-1)^r\,\epsilon_T\,G^{J\ell S}(p^2,q^2)^{\ell_r j_r L\,*}_{\mu} \qquad (27b)$$

L'invariance par renversement du temps implique que les facteurs

e forme sont réels ou imaginaires, et il en est de même des composantes phériques des fonctions de vertex standard et réduites, en hélicité, qui ont des combinaisons linéaires réelles des facteurs de forme.

5 - FACTEURS DE FORME MULTIPOLAIRES IRREDUCTIBLES ET MODELE ISOBARIQUE DANS LE CAS D'UN OPERATEUR QUADRIVECTORIEL

Les multipoles quadrivectoriels étant irréductibles, cf.§7-4, il en résulte que les facteurs de forme multipolaires d'un opérateur quadrivectoriel sont irréductibles. Dans cette section nous construisons explicitement les facteurs de forme irréductibles des fonctions de vertex quadrivectorielles à deux particules finales. Puis nous supposons que ces particules sont produites par l'intermédiaire d'un isobare. Au vertex de formation de cet isobare nous sommes ramenés à une fonction à une seule particule finale dont nous écrivons les facteurs de forme multipolaires selon la méthode exposée au § 11-6. Après avoir étudié la désintégration de l'isobare, nous analysons sa contribution au développement multipolaire pour deux particules finales. Enfin nous étudions en détail la production d'une résonance de spin 3/2.

15.1-Facteurs de forme multipolaires irréductibles

Dans le cas d'un opérateur quadrivectoriel, en utilisant les notations définies en (7-33) et (11-18), on peut écrire le développement multipolaire (14-6) des fonctions de vertex réduites sous la forme

$$\mathcal{F}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_{M} = \mathcal{E}^{J\ell S}_{t}(p^2,q^2,e)^{L}\ \underline{\mathcal{E}}_{t}(\underline{u},\{e\})^{L\,*}_{M} + \mathcal{E}^{J\ell S}_{\chi}(p^2,q^2,e)^{L} \quad (1)$$
$$\underline{\mathcal{E}}_{\chi}(\underline{u},\{e\})^{L\,*}_{M} + \mathcal{E}^{J\ell S}_{\tau}(p^2,q^2)^{L}\ \underline{\mathcal{E}}_{\tau}(\underline{u},\{e\})^{L\,*}_{M} + \mathcal{M}^{J\ell S}_{\tau}(p^2,q^2)^{L}\ \underline{\mathcal{M}}_{\tau}(\underline{u},\{e\})^{L\,*}_{M}$$

l'aide de la relation d'orthogonalité des multipoles (7-2), on peut nverser cette définition, on obtient

$$\mathcal{E}_t^{J\ell S}(p^2,q^2,e)^L = \int \underline{\mathcal{E}}_t(\underline{u},\{e\})^L_M \cdot \underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_M \, d\Omega(\underline{u},\{e\}) \ , \quad (2a)$$

$$\mathcal{E}_\chi^{J\ell S}(p^2,q^2,e)^L = - \int \underline{\mathcal{E}}_\chi(\underline{u},\{e\})^L_M \cdot \underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_M \, d\Omega(\underline{u},\{e\}) \ , \quad (2b)$$

$$\mathcal{E}_\tau^{J\ell S}(p^2,q^2)^L = - \int \underline{\mathcal{E}}_\tau(\underline{u},\{e\})^L_M \cdot \underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_M \, d\Omega(\underline{u},\{e\}) \ , \quad (2c)$$

$$\mathcal{M}_\tau^{J\ell S}(p^2,q^2)^L = - \int \underline{\mathcal{M}}_\tau(\underline{u},\{e\})^L_M \cdot \underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_M \, d\Omega(\underline{u},\{e\}) \ . \quad (2d)$$

Nous avons montré, cf.Eq.(11-17), que les facteurs de forme irréductibles "transverses" électrique $\mathcal{E}_\tau^{J\ell S}(p^2,q^2)^L$ et magnétique $\mathcal{M}_\tau^{J\ell S}(p^2,q^2)^L$ ne dépendent pas du choix du quadrivecteur $\underline{e}$ dans le 2-plan $(\underline{p}_1,\underline{p})$ tandis qu les deux autres en dépendent selon

$$\mathcal{E}_t^{J\ell S}(p^2,q^2,Le)^L = \mathrm{ch}\,\varkappa \ \mathcal{E}_t^{J\ell S}(p^2,q^2,e)^L - \mathrm{sh}\,\varkappa \ \mathcal{E}_\ell^{J\ell S}(p^2,q^2,e)^L \ , \quad (3a)$$

$$\mathcal{E}_\chi^{J\ell S}(p^2,q^2,Le)^L = - \mathrm{sh}\,\varkappa \ \mathcal{E}_t^{J\ell S}(p^2,q^2,e)^L + \mathrm{ch}\,\varkappa \ \mathcal{E}_\ell^{J\ell S}(p^2,q^2,e)^L \ . \quad (3b)$$

Avec ces notations, le développement multipolaire des composantes sphériques des fonctions de vertex réduites s'écrit, en hélicité,

$$\left[A^{J\ell S}(p^2,q^2,e_3)^L\right]^j_o = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \left[\delta_{jo} \ \mathcal{E}_t^{J\ell S}(p^2,q^2,e)^L - \delta_{j1} \ \mathcal{E}_\chi^{J\ell S}(p^2,q^2,e)^L\right] \quad (4a)$$

$$\left[A^{J\ell S}(p^2,q^2,e_3)^L\right]^1_{\pm 1} = \sqrt{\frac{2L+1}{8\pi}} \left[\mathcal{E}_\tau^{J\ell S}(p^2,q^2)^L \mp \mathcal{M}_\tau^{J\ell S}(p^2,q^2)^L\right] \quad (4b)$$

La conservation de la parité et l'invariance par renversement du temps imposent aux facteurs de forme irréductibles les règles de sélectio suivantes

$$\mathcal{M}_\tau^{J\ell S}(p^2,q^2)^L = - (-1)^{L+\ell} \epsilon\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \ \mathcal{M}_\tau^{J\ell S}(p^2,q^2)^L \quad (5a)$$

$$\mathcal{E}^{J\ell S}(p^2,q^2)^L = (-1)^{L+\ell} \epsilon\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \ \mathcal{E}^{J\ell S}(p^2,q^2)^L \quad (5b)$$

$$Z^{J\ell S}(p^2,q^2)^L = - \epsilon_T \ Z^{J\ell S}(p^2,q^2)^L \quad (6)$$

où la relation (5b) est valable pour les trois facteurs de forme électri- ques et la relation (6) pour les quatre facteurs de forme irréductibles. Dorénavant, pour simplifier l'écriture nous posons

$$\eta = \epsilon\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \quad (7)$$

Considérons quelques cas particuliers. Nous avons vu que si $s_3 = 0$ la sommation sur $S = s_2$ disparait. En outre si $s_1 = 0$, on a forcément $L = J$ et l'indice J n'est pas répété dans la notation des facteurs de for

En explicitant la conservation de la parité, on peut écrire le développement multipolaire des composantes sphériques des fonctions de vertex standard, en hélicité, à l'aide des équations (14-19) et (4) sous la forme

Bosons $s_1 = s_3 = 0$, J entier)

$$\sqrt{4\pi}\,[A(p^2,q^2,x,)^{n_2}]^J_o = \sum_{J,\ell} \sqrt{2J+1}\; Y^{\ell}_{-n_2}(x) \langle \ell -n_2 s_2 n_2 | J0\rangle \qquad (8a)$$

$$\frac{1+\eta(-1)^{J+\ell}}{2}\,[\delta_{jo}\,\mathcal{E}^{\ell}_{t}(p^2,q^2,e)^J - \delta_{j1}\,\mathcal{E}^{\ell}_{\ell}(p^2,q^2,e)^J]$$

$$\sqrt{4\pi}\,[A(p^2,q^2,x)^{n_2}]^1_{\pm} = \sum_{J,\ell} \sqrt{2J+1}\; Y^{\ell}_{\pm\frac{1}{2}-n_2}(x)\, \langle \ell, \pm 1-n_2, s_2 n_2 | J, \pm 1\rangle \qquad (8b)$$

$$\left[\frac{1+\eta(-1)^{J+\ell}}{2}\;\mathcal{E}^{\ell}_{\tau}(p^2,q^2)^J \mp \frac{1-\eta(-1)^{J+\ell}}{2}\;\mathcal{M}^{\ell}_{\tau}(p^2,q^2)^J\right]$$

Toujours dans le cas où $s_3 = 0$, si $s_1 = \frac{1}{2}$, L prend les valeurs $J\pm\frac{1}{2}$. Pour simplifier la notation, nous omettrons de répéter l'indice J dans l'écriture des facteurs de forme. En portant ces valeurs de L dans les règles de sélection (5) dues à la conservation de la parité, on obtient

$$\mathcal{M}^{\ell}_{\tau}(p^2,q^2)^{J+\frac{1}{2}} = (-1)^{J-\frac{1}{2}+\ell}\,\eta\,\mathcal{M}^{\ell}_{\tau}(p^2,q^2)^{J+\frac{1}{2}} \qquad (9a)$$

$$\mathcal{M}^{\ell}_{t}(p^2,q^2)^{J-\frac{1}{2}} = -(-1)^{J-\frac{1}{2}+\ell}\,\eta\,\mathcal{M}^{\ell}_{\tau}(p^2,q^2)^{J-\frac{1}{2}} \qquad (9b)$$

$$\mathcal{E}^{\ell}(p^2,q^2)^{J+\frac{1}{2}} = -(-1)^{J-\frac{1}{2}+\ell}\,\eta\,\mathcal{E}^{\ell}(p^2,q^2)^{J+\frac{1}{2}} \qquad (9c)$$

$$\mathcal{E}^{\ell}(p^2,q^2)^{J-\frac{1}{2}} = (-1)^{J-\frac{1}{2}+\ell}\,\eta\,\mathcal{E}^{\ell}(p^2,q^2)^{J-\frac{1}{2}} \qquad (9d)$$

Ces relations montrent que pour J et ℓ fixés, selon la valeur de η et de $L = J\pm\frac{1}{2}$, un des facteurs de forme de chaque type électrique et magnétique est nul. En explicitant la conservation de la parité, on déduit des équations (14-20) et (4) le développement multipolaire des composantes sphériques des fonctions de vertex standard en hélicité

Fermions $s_1 = ½$, $s_3 = 0$, (J demi-entier impair)

$$\sqrt{4\pi}\,[A(p^2,q^2,x)^{n_2}_{\pm½}]^{j}_{o} = \sum_{\ell J} \sqrt{J+½}\; Y^{\ell}_{\pm½-n_2}(x)\, \langle \ell, \pm½-n_2, s_2 n_2 | J, \pm½\rangle$$

$$\Big\{ \mp \frac{1+\eta(-1)^{\ell+J+½}}{2} \left[\delta_{jo}\, \mathcal{E}^{\ell}_{t}(p^2,q^2,e)^{J+½} - \delta_{j1}\, \mathcal{E}^{\ell}_{\ell}(p^2,q^2,e)^{J+½}\right]$$

$$+ \frac{1-\eta(-1)^{\ell+J+½}}{2} \left[\delta_{jo}\, \mathcal{E}^{\ell}_{t}(p^2,q^2,e)^{J+½} - \delta_{j1}\, \mathcal{E}^{\ell}_{\ell}(p^2,q^2,e)^{J-½}\right]\Big\}$$

$$\sqrt{8\pi}\,[A(p^2,q^2,x)^{n_2}_{\pm½}]^{1}_{\pm 1} = \sum_{\ell J} Y^{\ell}_{\pm 3/2-n_2}(x)\, \langle \ell, \pm 3/2-n_2, s_2 n_2 | J, \pm\, 3/2\rangle$$

$$\Big\{ \mp \frac{1+\eta(-)^{\ell+J+½}}{2} \left[\sqrt{J-½}\; \mathcal{E}^{\ell}_{\tau}(p^2,q^2)^{J+½} + \sqrt{J+3/2}\; \mathcal{M}^{\ell}_{\tau}(p^2,q^2)^{J-½}\right]$$

$$+ \frac{1-\eta(-1)^{\ell+J+½}}{2} \left[\sqrt{J+3/2}\; \mathcal{E}^{\ell}_{\tau}(p^2,q^2)^{J-½} + \sqrt{J-½}\; \mathcal{M}^{\ell}_{\tau}(p^2,q^2)^{J+½}\right]\Big\} \qquad (10)$$

$$\sqrt{8\pi}\,[A(p^2,q^2,\underline{u}.\underline{v})^{n_2}_{\pm½}]^{1}_{\mp 1} = \sum_{\ell J} Y^{\ell}_{\mp½-n_2}(x)\, \langle \ell, \mp½-n_2, s_2 n_2 | J, \mp½\rangle$$

$$\Big\{ \mp \frac{1+\eta(-1)^{\ell+J+½}}{2} \left[\sqrt{J+3/2}\; \mathcal{E}^{\ell}_{\tau}(p^2,q^2)^{J+½} - \sqrt{J-½}\; \mathcal{M}^{\ell}_{\tau}(p^2,q^2)^{J-½}\right]$$

$$+ \frac{1-\eta(-1)^{\ell+J+½}}{2} \left[\sqrt{J-½}\; \mathcal{E}^{\ell}_{\tau}(p^2,q^2)^{J-½} - \sqrt{J+3/2}\; \mathcal{M}^{\ell}_{\tau}(p^2,q^2)^{J+½}\right]\Big\}$$

Dans le cas où $s_2 = ½$, J prend les valeurs $\ell \pm ½$, et on peut effectuer la sommation sur J dans les expressions ci-dessus. Pour préciser la valeur de J dans l'écriture des facteurs de forme multipolaire nous ferons suivre l'indice ℓ du signe + ou - selon que $J = \ell \pm ½$, i.e. on note $\ell_{\pm}$. En outre, pour simplifier les formules suivantes nous enlevons un coefficient $\sqrt{L(L+1)}$ aux facteurs de forme transverses

$$\mathcal{E}^{\ell\pm}_{\tau}(p^2,q^2)^{L} = \mathcal{E}^{\ell\pm ½\,\ell}_{\tau}(p^2,q^2)^{L}/\sqrt{L(L+1)} \qquad (11a)$$

$$\mathcal{M}^{\ell\pm}_{\tau}(p^2,q^2)^{L} = \mathcal{M}^{\ell\pm ½\,\ell}_{\tau}(p^2,q^2)^{L}/\sqrt{L(L+1)} \qquad (11b)$$

$$\mathcal{E}^{\ell\pm}_{t}(p^2,q^2)^{L} = \mathcal{E}^{\ell\pm ½\,\ell}_{t}(p^2,q^2)^{L}\,, \quad \mathcal{E}^{\ell\pm}_{\ell}(p^2,q^2)^{L} = \mathcal{E}^{\ell\pm ½\,\ell}_{\ell}(p^2,q^2)^{L} \qquad (11c)$$

Dans chaque cas de parité, $\eta = \pm 1$, le développement multipolaire (10) s'écrit

$\underline{s_1 = s_2 = \tfrac{1}{2},\ s_3 = 0,\ \eta = \epsilon\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = 1}$

$$4\pi \left[A(p^2,q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^j_o = \sum_\ell P^\ell_o(x) \left\{\delta_{jo}\left[(\ell+1)\ \mathcal{E}^{\ell+}_t(p^2,q^2)^\ell + \ell\ \mathcal{E}^{\ell-}_t(p^2,q^2)^\ell\right] - \delta_{j1}\left[(\ell+1)\ \mathcal{E}^{\ell+}_{\mathcal{L}}(p^2,q^2)^\ell + \ell\ \mathcal{E}^{\ell-}_{\mathcal{L}}(p^2,q^2)^\ell\right]\right\}$$

$$4\pi \left[A(p^2,q^2,x)^{\mp\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^j_o = \mp \sum_\ell P^\ell_1(x) \left\{\delta_{jo}\left[\mathcal{E}^{\ell+}_t(p^2,q^2)^\ell - \mathcal{E}^{\ell-}_t(p^2,q^2)^\ell\right] - \delta_{j1}\left[\mathcal{E}^{\ell+}_{\mathcal{L}}(p^2,q^2)^\ell - \mathcal{E}^{\ell-}_{\mathcal{L}}(p^2,q^2)^\ell\right]\right\}$$

$$4\pi \left[A(p^2,q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\pm = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}} \sum_\ell P^\ell_1(x) \left\{(\ell+2)\left[\mathcal{E}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^\ell + \mathcal{M}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell+1}\right] + (\ell-1)\left[\mathcal{E}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^\ell + \mathcal{M}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell-1}\right]\right\}$$

$$4\pi \left[A(p^2,q^2,x)^{\mp\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_\ell P^\ell_2(x) \left\{\mathcal{E}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^\ell + \mathcal{M}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell+1} - \mathcal{E}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^\ell - \mathcal{M}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell-1}\right\} \qquad (12a)$$

$$4\pi \left[A(p^2,q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\mp = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \sum_\ell P^\ell_1(x) \left\{\ell\ \mathcal{E}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^\ell - (\ell+2)\ \mathcal{M}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell+1} + (\ell+1)\ \mathcal{E}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^\ell - (\ell-1)\ \mathcal{M}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell-1}\right\}$$

$$4\pi \left[A(p^2,q^2,x)^{\mp\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\mp = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_\ell P^\ell_o(x) \left\{\ell(\ell+1)\ \mathcal{E}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^\ell - (\ell+1)(\ell+2)\ \mathcal{M}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell+1} + \ell(\ell+1)\ \mathcal{E}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^\ell - \ell(\ell-1)\ \mathcal{M}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell-1}\right\}$$

Dans ce cas de parité, les multipoles $\mathcal{E}^{\ell\pm}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^L$ et $\mathcal{M}^{\ell\pm}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^L$ sont les mêmes, à un facteur près dépendant de la normalisation des amplitudes, que ceux définis par [C.G.L.N.57] et [Go.Wa.64] pour la photoproduction de méson π sur nucléon.

De même, nos multipoles correspondent, à un facteur près, à ceux définis par [Adl.68] pour la production par interaction faible de méson π sur nucléon. Dans le cadre de la théorie V-A, on doit considérer des multipoles vectoriels $\eta = +1$ et axiaux $\eta = -1$, la conservation du courant vectoriel éliminant un multipole vectoriel.

Nous allons maintenant considérer les réactions de production de

$\underline{s_1 = s_2 = \tfrac{1}{2},\ s_3 = 0,\ \eta = \epsilon\epsilon_1\xi_2\xi_3 = -1}$

$$4\pi \left[A(p^2,q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^j_o = \mp \sum_\ell P^\ell_o(x) \left\{\delta_{jo}\left[(\ell+1)\ \mathcal{E}^{\ell+}_t(p^2,q^2)^{\ell+1} + \ell\ \mathcal{E}^{\ell-}_t(p^2,q^2)^{\ell-1}\right] - \delta_{j1}\left[(\ell+1)\ \mathcal{E}^{\ell+}_{\mathcal{L}}(p^2,q^2)^{\ell+1} + \ell\ \mathcal{E}^{\ell-}_{\mathcal{L}}(p^2,q^2)^{\ell-1}\right]\right\}$$

$$4\pi \left[A(p^2,q^2,x)^{\mp\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^j_o = \sum_\ell P^\ell_1(x) \left\{\delta_{jo}\left[\mathcal{E}^{\ell+}_t(p^2,q^2)^{\ell+1} - \mathcal{E}^{\ell-}_t(p^2,q^2)^{\ell-1}\right] - \delta_{j1}\left[\mathcal{E}^{\ell+}_{\mathcal{L}}(p^2,q^2)^{\ell+1} - \mathcal{E}^{\ell-}_{\mathcal{L}}(p^2,q^2)^{\ell-1}\right]\right\}$$

$$4\pi \left[A(p^2,q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_\ell P^\ell_1(x) \left\{(\ell+2)\left[\mathcal{E}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell+1} + \mathcal{M}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell}\right] + (\ell-1)\left[\mathcal{E}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell-1} + \mathcal{M}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell}\right]\right\}$$

$$4\pi \left[A(p^2,q^2,x)^{\mp\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\pm = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}} \sum_\ell P^\ell_2(x) \left\{\mathcal{E}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell+1} + \mathcal{M}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell} - \mathcal{E}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell-1} - \mathcal{M}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell}\right\} \qquad (12b)$$

$$4\pi \left[A(p^2,q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\mp = \frac{-1}{\sqrt{2}} \sum_\ell P^\ell_1(x) \left\{(\ell+2)\ \mathcal{E}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell+1} - \ell\ \mathcal{M}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell} + (\ell-1)\ \mathcal{E}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell-1} - (\ell+1)\ \mathcal{M}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell}\right\}$$

$$4\pi \left[A(p^2,q^2,x)^{\mp\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\pm = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}} \sum_\ell P^\ell_o(x) \left\{(\ell+1)(\ell+2)\ \mathcal{E}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell+1} - \ell(\ell+1)\ \mathcal{M}^{\ell+}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell} + \ell(\ell-1)\ \mathcal{E}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell-1} - \ell(\ell+1)\ \mathcal{M}^{\ell-}_{\mathcal{T}}(p^2,q^2)^{\ell}\right\}$$

15.2-Hypothèse du modèle isobarique

Dans l'hypothèse du modèle isobarique, les deux particules finales ne sont pas produites directement (Fig.2) mais elles proviennent de la désintégration d'un isobare de masse M_o, spin J_o et parité ϵ_o donnés.

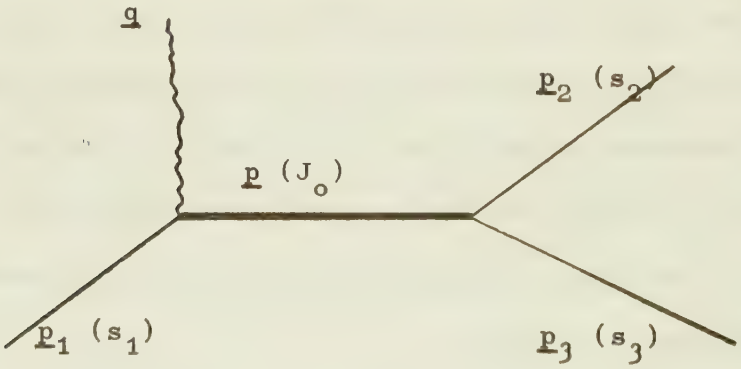

Fig. 2

Dans ce paragraphe, nous considérons le vertex de formation de l'isobare et dans le paragraphe suivant nous étudions sa désintégration.

A la formation de l'isobare, les fonctions de vertex standard et

réduites de l'opérateur A sont définies par

$$\underline{A}(q^2,\underline{u},\{e\})^N_{n_1} = \langle\{p\}_e\ N|\underline{A}|\{p_1\}_e\ n_1\rangle\ , \tag{13}$$

$$\underline{A}(q^2,\underline{u},\{e\})^N_{n_1} = \sum_L \langle J_o N|LMs_1 n_1\rangle\ \underline{A}(q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_M \tag{14}$$

Le développement multipolaire de ces fonctions réduites est

$$\underline{A}(q^2,u,\{e\})^{L\,*}_M = \sum_{j,\mu} G^j_\mu(q^2,e)^L\ \underline{X}^j_\mu(\underline{u},\{e\})^{L\,*}_M\ , \tag{15}$$

avec

$$G^o_o(q^2,e)^L = \mathcal{E}_t(q^2,e)^L\ ,\quad G^1_o(q^2,e)^L = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(q^2,e)^L \tag{16a}$$

$$G^1_-(q^2,e)^L = \mathcal{E}_{\mathcal{T}}(q^2)^L\ ,\quad G^1_+(q^2,e)^L = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(q^2)^L\ . \tag{16b}$$

L'invariance par renversement du temps impose à ces facteurs de forme d'être réels ou imaginaires purs, tandis que la conservation de la parité leur impose les règles de sélection suivantes

$$\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(q^2)^L = (-1)^{L+1}\ \epsilon\epsilon_1\epsilon_o\ \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(q^2)^L\ , \tag{17a}$$

$$\mathcal{E}\ (q^2)^L = (-1)^L\ \epsilon\epsilon_1\epsilon_o\ \mathcal{E}(q^2)^L\ , \tag{17b}$$

où la seconde règle est valable pour les trois facteurs de forme électriques et où ϵ est la parité de l'opérateur $\underline{A}$.

15.3-Désintégration de l'isobare

Nous supposons maintenant que l'isobare, d'impulsion $\underline{p}$ se désintègre en deux particules 2 et 3, de masses, spins et parités, M_2, M_3, s_2, s_3, ϵ_2, ϵ_3 et d'impulsions $\underline{p}_2$ et $\underline{p}_3$. La conservation de l'énergie-impulsion dans la désintégration s'écrit

$$\underline{p} = \underline{p}_2 + \underline{p}_3 \tag{18}$$

Soit T l'opérateur de désintégration. L'invariance relativiste lui impose d'être un opérateur scalaire sous l'action d'une transformation de Lorentz du groupe restreint, représentée par $U(\Lambda)$;

$$U(\Lambda)\ T\ U(\Lambda)^{-1} = T\ . \tag{19}$$

En outre, la parité sera conservée dans la désintégration, si dans l'opération de parité, l'opérateur T est invariant,

$$U(P)\ T\ U(P)^{-1} = T\ . \tag{20}$$

Les facteurs de forme de l'opérateur T sont appelés les amplitudes de désintégration. Pour les définir nous utilisons la méthode exposée au

cours de ce quatrième chapitre. Mais dans ce cas particulier, la paramétrisation est beaucoup plus simple, car, à cause de la conservation de l'énergie-impulsion, tous les invariants sont fixés par les masses des particules.

Les fonctions de vertex standard à deux particules finales, de l'opérateur de désintégration T, sont paramétrées, dans la tétrade $\{e\}$, par le quadrivecteur $\underline{v}$, cf.Eq.(13-8), et elles sont définies par

$$T(\underline{v},\{e\})^{n_3 n_2}_{N} = \langle \{p_3\}_e\, n_3| \otimes \langle \{p_2\}_e n_2|\, T\, |\{p\}_e, N\rangle \qquad (21)$$

La conservation du moment angulaire à la désintégration implique que le moment angulaire total du système des deux particules finales est égal au spin J_o de l'isobare. On définit alors les quantités invariantes, appelées amplitudes de désintégration, $T^{\ell S}$, par

$$T(\underline{v},\{e\})^{n_3 n_2}_{N} = \sum_{\ell,S} \langle s_3 n_3 s_2 n_2|\, S\sigma\rangle\langle \ell m S\sigma\,|\, J_o N\rangle\, T^{\ell S}\, Y^{\ell}_{m}(\underline{v},\{e\}) \ , \qquad (22)$$

ou inversement

$$T^{\ell S} = \frac{2\ell+1}{2J_o+1} \langle J_o N|\, \ell m S\sigma\rangle\langle S\sigma\,|\, s_3 n_3 s_2 n_2\rangle \int Y^{\ell}_{m}(\underline{v},\{e\})^{*}\, T(\underline{v},\{e\})^{n_3 n_2}_{N}\, d\Omega(\underline{v},\{e\}) \ . \qquad (23)$$

La conservation de la parité entraine l'existence de la règle de sélection suivante sur les amplitudes :

$$T^{\ell S} = (-1)^{\ell}\, \epsilon_o \epsilon_2 \epsilon_3\, T^{\ell S} \qquad (24)$$

15.4- Contribution d'un isobare au développement multipolaire des fonctions de vertex à deux particules finales

En considérant globalement les deux processus de formation et de désintégration de l'isobare, on peut définir des pseudo-fonctions de vertex standard par

$$\tilde{\underline{A}}(q^2,\underline{u},\underline{v},\{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} = T(\underline{v},\{e\})^{n_3 n_2}_{N}\, \underline{A}(q^2,\underline{u},\{e\})^{N}_{n_1} \qquad (25)$$

ainsi que des fonctions réduites, cf.(13-24), où le moment angulaire total des deux particules J est égal à J_o

$$\tilde{\underline{A}}(q^2,\underline{u},\underline{v},\{e\})^{n_3 n_2}_{n_1} = \sum_{\ell S L M} Y^{\ell}_{m}(\underline{v},\{e\}) \langle s_3 n_3 s_2 n_2|\, S\sigma\rangle\langle \ell m S\sigma\,|\, J_o N\rangle$$
$$\langle J_o N|\, L M s_1 n_1\rangle\, \tilde{\underline{A}}^{\ell S}(q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_{M} \ . \qquad (26)$$

En utilisant les relations (13)(14) et (21), on obtient le développement multipolaire de ces fonctions réduites

$$\underline{\tilde{A}}^{\ell S}(q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_{M} = \sum_{j,\mu} T^{\ell S}\; G^{j}_{\mu}(q^2,e)^{L}\; \underline{X}^{j}_{\mu}(\underline{u},\{e\})^{L\,*}_{M} \qquad (27)$$

Comparons les relations (26) et (27) aux expressions équivalentes obtenues pour les fonctions de vertex à deux particules finales, cf. Eq. (13-23) et (14-28)

$$\underline{A}(p^2,q^2,\underline{u},\underline{v},\{e\})^{n_3 n_2}_{\quad n_1} = \sum_{J\ell SLM} Y^{\ell}_{m}(\underline{v},\{e\})\langle s_3 n_3 s_2 n_2 | S\sigma\rangle\langle \ell m S\sigma | JN\rangle$$

$$\langle JN | LM s_1 n_1\rangle\; \underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_{M} \qquad (28)$$

$$\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L\,*}_{M} = \sum_{j,\mu} G^{jJ\ell S}_{\mu}(p^2,q^2,e)^{L}\; \underline{X}^{j}_{\mu}(\underline{u},\{e\})^{L\,*}_{M} \qquad (29)$$

où l'on a posé

$$G_o^{oJ\ell S}(p^2,q^2,e)^L = \mathcal{E}_t^{J\ell S}(p^2,q^2,e)^L \quad , \quad G_o^{1J\ell S}(p^2,q^2,e)^L = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{J\ell S}(p^2,q^2,e)^L \qquad (30a)$$

$$G_-^{1J\ell S}(p^2,q^2,e)^L = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{J\ell S}(p^2,q^2)^L \quad , \quad G_+^{1J\ell S}(p^2,q^2,e)^L = \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^{J\ell S}(p^2,q^2)^L \qquad (30b)$$

Nous avons vu que la conservation de la parité impose à ces facteurs de forme multipolaires les règles de sélection

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}^{J\ell S}(p^2,q^2)^L = (-1)^{L+\ell+1}\,\epsilon\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\; \mathcal{M}^{J\ell S}(p^2,q^2)^L \qquad (31a)$$

$$\mathcal{E}^{J\ell S}(p^2,q^2)^L = (-1)^{L+\ell}\,\epsilon\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\; \mathcal{E}^{J\ell S}(p^2,q^2)^L \qquad (31b)$$

où la dernière expression est valable pour les trois multipoles de type électrique.

Dans l'hypothèse où les deux particules finales sont obligatoirement obtenues par l'intermédiaire d'un seul isobare, les développements (26,27) et (28,29) doivent être identiques. En identifiant on obtient

$$\underline{A}^{J\ell S}(p^2,q^2,\underline{u},\{e\})^{L}_{M} = \delta(M_o^2 - p^2)\,\delta_{J_o J}\; \underline{\tilde{A}}^{\ell S}(q^2,\underline{u},\{e\})^{L}_{M} \qquad (32a)$$

$$G^{jJ\ell S}_{\mu}(p^2,q^2,e)^L = \delta(M_o^2 - p^2)\;\delta_{J_o J}\; T^{\ell S}\; G^{j}_{\mu}(q^2,e)^L \qquad (32b)$$

Il faut noter que, dans ce cas, les règles de sélection dues à la parité sont plus restrictives que celles énoncées en (31). En effet, les équations (17), (24) et (32) conduisent à

$$\mathcal{M}^{J_o \ell S}(M_o^2,q^2)^L = (-1)^{L+\ell+1}\,\epsilon\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\,\mathcal{M}^{J_o \ell S}(M_o^2,q^2)^L \qquad (33a)$$

$$\mathcal{E}^{J_o \ell S}(M_o^2,q^2)^L = (-1)^{L+\ell}\,\epsilon\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\,\mathcal{E}^{J_o \ell S}(M_o^2,q^2)^L \qquad (33b)$$

$$Z^{J_o \ell S}(M_o^2,q^2)^L = (-1)^{\ell}\,\epsilon_o\epsilon_2\epsilon_3\,Z^{J_o \ell S}(M_o^2,q^2)^L \qquad (33c)$$

Si les deux particules finales peuvent être obtenues par l'intermédiaire de plusieurs isobares, le développement multipolaire général (28,2 est la superposition des développements (26,27) pour chacun des isobares Dans ce cas le produit $T^{\ell S}\ G_\mu^j(q^2,e)^L$ contribue aux facteurs de forme multipolaires $G_\mu^{jJ_o\ell S}(M_o^2,q^2,e)^L$ satisfaisant les règles de sélection (33) dues à la parité. On écrit symboliquement cette contribution sous la forme

$$T^{\ell S}\ G_\mu^j(q^2,e)^L \longrightarrow G_\mu^{jJ_o\ell S}(M_o^2,q^2,e)^L \qquad (34)$$

15.5-Application à la formation d'une résonance de spin 3/2

Considérons la formation d'une résonance de spin 3/2 à partir d'un particule initiale de spin ½. En hélicité, au vertex de formation de l'isobare, le développement multipolaire des composantes sphériques des fonctions de vertex standard s'écrit, cf.Eq.(11-28),

$\epsilon\epsilon_o\epsilon_1 = 1$

$$\sqrt{8\pi}\,[A(q^2,e_3)^{\pm\frac12}_{\pm\frac12}]^j_o = \mp[\delta_{jo}\,\mathcal{E}_t(q^2,e)^2 - \delta_{j1}\,\mathcal{E}_x(q^2,e)^2]$$

$$\sqrt{8\pi}\,[A(q^2,e_3)^{\pm3/2}_{\pm\frac12}]^1_\pm = \mp\sqrt{6}\,[\,\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(q^2)^2 + \mathcal{M}_{\mathcal{R}}(q^2)^1]$$

$$\sqrt{8\pi}\,[A(q^2,e_3)^{\mp\frac12}_{\pm\frac12}]^1_\mp = \mp\sqrt{2}\,[3\,\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(q^2)^2 - \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(q^2)^1]$$

$\epsilon\epsilon_o\epsilon_1 = -1$

$$\sqrt{8\pi}\,[A(q^2,e_3)^{\pm\frac12}_{\pm\frac12}]^j_o = \delta_{jo}\,\mathcal{E}_t(q^2,e)^1 - \delta_{j1}\,\mathcal{E}_x(q^2,e)^1$$

$$\sqrt{8\pi}\,[A(q^2,e_3)^{\pm3/2}_{\pm\frac12}]^1_\pm = +\sqrt{6}\,[\,\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(q^2)^1 + \mathcal{M}_{\mathcal{R}}(q^2)^2]$$

$$\sqrt{8\pi}\,[A(q^2,e_3)^{\mp\frac12}_{\pm\frac12}]^1_\mp = +\sqrt{2}\,[\,\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(q^2)^1 - 3\,\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(q^2)^2]$$

(35)

où l'on a effectué la transformation (15-11) aux facteurs de forme transverses : $Z^L_{\mathcal{R}} \longrightarrow \sqrt{L(L+1)}\ Z^L_{\mathcal{R}}$.

Supposons que la résonance se désintègre en deux particules, l'une de spin O, l'autre de spin ½. Dans ce cas, la sommation sur S = ½

disparait dans l'équation (22), et l'indice ℓ prend les valeurs 1 et 2 ce qui donne a priori, deux amplitudes de désintégration T^1 et T^2. Cependant, la règle de sélection (24) due à la parité annule une des deux amplitudes.

$$\begin{aligned} T^1 &= 0 \qquad \text{si} \quad \epsilon_o\epsilon_2\epsilon_3 = +1 \ , \\ T^2 &= 0 \qquad \text{si} \quad \epsilon_o\epsilon_2\epsilon_3 = -1 \ . \end{aligned} \tag{36}$$

Si on quantifie en hélicité, les fonctions de vertex de l'opérateur de désintégration s'expriment en fonction des amplitudes et des fonctions de Legendre dans chaque cas de parité sous la forme

	$\epsilon_o\epsilon_2\epsilon_3 = 1$	$\epsilon_o\epsilon_2\epsilon_3 = -1$
$\sqrt{4\pi}\ T(x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}$	$\mp\sqrt{2}\ T^2\ P_o^2(x)$	$\sqrt{2}\ T^1\ P_o^1(x)$
$\sqrt{4\pi}\ T(x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\mp\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\ T^2\ P_1^2(x)$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ T^1\ P_o^1(x)$
$\sqrt{4\pi}\ T(x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm 3/2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\ T^2\ P_1^2(x)$	$\mp\sqrt{\frac{3}{2}}\ T^1\ P_1^1(x)$
$\sqrt{4\pi}\ T(x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\mp 3/2}$	$\mp\sqrt{\frac{1}{6}}\ T^2\ P_2^2(x)$	0

(37)

Les relations (26,27) et (35,37) permettent d'obtenir le développement multipolaire des composantes sphériques des pseudo-fonctions de vertex. En hélicité, ce développement s'écrit selon les cas de parité

$\underline{J_o = 3/2,\ s_1 = s_2 = \tfrac{1}{2},\ s_3 = 0,\ \epsilon\ \epsilon_o\epsilon_1 = \epsilon_o\epsilon_2\epsilon_3 = 1}$

$$4\pi\left[\widetilde{A}(q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^j_o = T^2\ P_o^2(x)\ \left[\delta_{jo}\ \mathcal{E}_t(q^2,e)^2 - \delta_{j1}\ \mathcal{E}_\ell(q^2,e)^1\right]$$

$$4\pi\left[\widetilde{A}(q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\ T^2\ P_1^2(x)\ \left[\mathcal{E}_\tau(q^2)^2 + \mathcal{M}_\tau(q^2)^1\right]$$

$$4\pi\left[\widetilde{A}(q^2,x)^{\mp\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\pm = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ T^2\ P_2^2(x)\ \left[\mathcal{E}_\tau(q^2)^2 + \mathcal{M}_\tau(q^2)^1\right]$$

$$4\pi\left[\widetilde{A}(q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\mp = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ T^2\ P_1^2(x)\ \left[3\ \mathcal{E}_\tau(q^2)^2 - \mathcal{M}_\tau(q^2)^1\right]$$

$$4\pi\left[\widetilde{A}(q^2,x)^{\mp\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\mp = -\sqrt{2}\ T^2\ P_o^2(x)\ \left[3\ \mathcal{E}_\tau(q^2)^2 - \mathcal{M}_\tau(q^2)^1\right]$$

(38a)

$J_o = 3/2,\ s_1 = s_2 = \tfrac{1}{2},\ s_3 = 0,\ \epsilon\epsilon_o\epsilon_1 = -\epsilon_o\epsilon_2\epsilon_3 = -1$

$$4\pi \left[\tilde{A}(q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^j_o = \mp T^2 P^2_o(x) \left[\delta_{jo}\, \mathcal{E}_t(q^2,e)^1 - \delta_{j1}\, \mathcal{E}_\ell(q^2,e)^1\right]$$

$$4\pi \left[\tilde{A}(q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} T^2 P^2_1(x) \left[\mathcal{E}_\ell(q^2)^1 + \mathcal{M}_\ell(q^2)^2\right]$$

$$4\pi \left[\tilde{A}(q^2,x)^{\mp\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\pm = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} T^2 P^2_2(x) \left[\mathcal{E}_\ell(q^2)^1 + \mathcal{M}_\ell(q^2)^2\right] \qquad (38b)$$

$$4\pi \left[\tilde{A}(q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\mp = -\frac{1}{\sqrt{2}} T^2 P^2_1(x) \left[\mathcal{E}_\ell(q^2)^1 - 3\,\mathcal{M}_\ell(q^2)^2\right]$$

$$4\pi \left[\tilde{A}(q^2,x)^{\mp\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\mp = \mp \sqrt{2}\, T^2 P^2_o(x) \left[\mathcal{E}_\ell(q^2)^1 - \sqrt{3}\,\mathcal{M}_\ell(q^2)^2\right]$$

$J_o = 3/2,\ s_1 = s_2 = \tfrac{1}{2},\ s_3 = 0,\ \epsilon\epsilon_o\epsilon_1 = -\epsilon_o\epsilon_2\epsilon_3 = 1$

$$4\pi \left[\tilde{A}(q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^j_o = \mp T^1 P^1_o(x) \left[\delta_{jo}\, \mathcal{E}_t(q^2,e)^2 - \delta_{j1}\, \mathcal{E}_\ell(q^2,e)^1\right]$$

$$4\pi \left[\tilde{A}(q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} T^1 P^1_1(x) \left[3\,\mathcal{E}_\ell(q^2)^2 + 3\,\mathcal{M}_\ell(q^2)^1\right]$$

$$4\pi \left[\tilde{A}(q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\mp = -\frac{1}{\sqrt{2}} T^1 P^1_1(x) \left[3\,\mathcal{E}_\ell(q^2)^2 - \mathcal{M}_\ell(q^2)^1\right] \qquad (38c)$$

$$4\pi \left[\tilde{A}(q^2,x)^{\mp\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\mp = \mp \sqrt{2}\, T^1 P^1_o(x) \left[3\,\mathcal{E}_\ell(q^2)^2 - \mathcal{M}_\ell(q^2)^1\right]$$

$J_o = 3/2,\ s_1 = s_2 = \tfrac{1}{2},\ s_3 = 0,\ \epsilon\epsilon_o\epsilon_1 = \epsilon_o\epsilon_2\epsilon_3 = -1$

$$4\pi \left[\tilde{A}(q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^j_o = T^1 P^1_o(x) \left[\delta_{jo}\, \mathcal{E}_t(q^2,e)^1 - \delta_{j1}\, \mathcal{E}_\ell(q^2,e)^1\right]$$

$$4\pi \left[\tilde{A}(q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} T^1 P^1_1(x) \left[3\,\mathcal{E}_\ell(q^2)^1 + 3\,\mathcal{M}_\ell(q^2)^2\right]$$

$$4\pi \left[\tilde{A}(q^2,x)^{\pm\frac{1}{2}}_{\mp\frac{1}{2}}\right]^1_\mp = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} T^1 P^1_1(x) \left[\mathcal{E}_\ell(q^2)^1 - 3\,\mathcal{M}_\ell(q^2)^2\right] \qquad (38d)$$

$$4\pi \left[\tilde{A}(q^2,x)^{\mp\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^1_\mp = \sqrt{2}\, T^1 P^1_o(x) \left[\mathcal{E}_\ell(q^2)^1 - 3\,\mathcal{M}_\ell(q^2)^2\right]$$

La comparaison des développements (12) et (38) dans chaque cas de parité, permet de déterminer la contribution de la résonance au développement multipolaire effectué avec le système des deux particules finales, on obtient

$\underline{\epsilon\epsilon_o\epsilon_1 = \epsilon_o\epsilon_2\epsilon_3 = 1}$

$$T^2\,\mathcal{E}(q^2,e)^2 \longrightarrow \mathcal{E}^{2-}(M_o^2,q^2,e)^2$$

$$T^2\,\mathcal{M}_\tau(q^2,e)^1 \longrightarrow \mathcal{M}_\tau^{2-}(M_o^2,q^2)^1$$

$\underline{\epsilon\epsilon_o\epsilon_1 = -\epsilon_o\epsilon_2\epsilon_3 = -1}$

$$T^2\,\mathcal{E}(q^2,e)^1 \longrightarrow \mathcal{E}^{2-}(M_o^2,q^2,e)^1$$

$$T^2\,\mathcal{M}_\tau(q^2)^2 \longrightarrow \mathcal{M}_\tau^{2-}(M_o^2,q^2)^2$$

(39)

$\underline{\epsilon\epsilon_o\epsilon_1 = -\epsilon_o\epsilon_2\epsilon_3 = 1}$

$$T^1\,\mathcal{E}(q^2,e)^2 \longrightarrow \mathcal{E}^{1+}(M_o^2,q^2,e)^2$$

$$T^1\,\mathcal{M}_\tau(q^2)^1 \longrightarrow \mathcal{M}_\tau^{1+}(M_o^2,q^2)^1$$

$\underline{\epsilon\epsilon_o\epsilon_1 = \epsilon_o\epsilon_2\epsilon_3 = -1}$

$$T^1\,\mathcal{E}(q^2,e)^1 \longrightarrow \mathcal{E}^{1+}(M_o^2,q^2,e)^1$$

$$T^1\,\mathcal{M}_\tau(q^2)^2 \longrightarrow \mathcal{M}_\tau^{1+}(M_o^2,q^2)^2$$

où les relations écrites avec $\mathcal{E}$ sont valables pour les trois facteurs de forme multipolaires de type électrique.

CHAPITRE CINQUIEME

REPRESENTATION DES FONCTIONS DE VERTEX QUADRIVECTORIELLES

DANS LE FORMALISME DE RARITA-SCHWINGER

16 - RAPPELS SUR LA REPRESENTATION DES ETATS DE POLARISATION

Pour une étude complète de la description relativiste des états de polarisation, nous renvoyons au cours de L. Michel [Mic.64] et à la thèse de P. Minnaert [Min.68]. Nous rappelons d'abord quelques propriétés des matrices de Dirac, la description par des spineurs des états de polarisation des particules de spin ½, et les formules de Bouchiat-Michel. Ensuite nous donnons la représentation des états de spin 1 par des quadrivecteurs, des états de spin entier par des tenseurs et des états de spin demi-entier par des spineurs-tenseurs de Rarita-Schwinger.

16.1 - Matrices de Dirac

Soit $\underline{\gamma}$ l'ensemble des 4 matrices de Dirac. Elles satisfont la relation d'anticommutation

$$\{i\underline{\gamma}, i\underline{\gamma}\} = 2\,\underline{g} \tag{1}$$

et donc

$$(i\gamma^o)^2 = -(i\gamma^j)^2 = 1 \qquad \text{avec } j = 1, 2, 3 \tag{2}$$

En faisant le produit des 4 matrices γ, on définit une nouvelle matrice

$$\gamma^5 = \gamma^o\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad , \quad (i\gamma^5)^2 = 1 \tag{3}$$

Nous utilisons la notation

$$\not{p} = i\underline{\gamma}\cdot\underline{p} \tag{4}$$

et les symboles suivants pour les traces de produits de matrices γ

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\not{a}\not{b}) = \underline{a}\cdot\underline{b} \tag{5a}$$

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = [a,b,c,d] = \underline{a}\cdot\underline{b}\;\underline{c}\cdot\underline{d} - \underline{a}\cdot\underline{c}\;\underline{b}\cdot\underline{d} + \underline{a}\cdot\underline{d}\;\underline{b}\cdot\underline{c} \tag{5b}$$

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,(i\gamma^5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = i\,\{a,b,c,d\} = i\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma \tag{5c}$$

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[(1+\xi i\gamma^5)\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\right] = \|a,b,c,d\|_\xi = [a,b,c,d] + i\xi\{a,b,c,d\} \tag{5d}$$

où ξ est un nombre. Si certaines matrices $i\underline{\gamma}$ ne sont pas contractées par un quadrivecteur, on place un tiret - dans les symboles pour représenter l'indice de Lorentz, par exemple

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[(1+i\gamma^5)\not{a}i\underline{\gamma}\not{c}i\underline{\gamma}\right] = \|a,-,c,-\| \qquad (5e)$$

16.2-Particules de spin ½

Les états d'une particule de spin ½, de masse m et d'impulsion $\underline{p}$ sont représentés par un spineur à 4 composantes, u(p) solution de l'équation de Dirac

$$(\not{p}-m)\,u(p) = 0 \qquad (6)$$

Les spineurs sont normalisés de façon que :

$$\tilde{u}(p)\,\frac{i\gamma^o}{p^o}\,u(p) = 1\ , \qquad (7)$$

où $\tilde{u}(p)$ est le spineur adjoint

$$\tilde{u}(p) = \left[u(p)\right]^+ i\gamma^o \qquad (8)$$

Soit {p} une tétrade adaptée à l'impulsion $\underline{p}$. Nous notons $\underline{N}_i$ i= 1,2,3 les trois quadrivecteurs de genre espace de la tétrade et $\underline{N}_n$ n = -1, 0, +1 les quadrivecteurs de la base sphérique associée.

On note $u_\epsilon(\{p\})$ le spineur qui décrit une particule dont la projection sur l'axe de quantification $\underline{N}_3$ est ϵ ($\epsilon = \pm ½$). Le spineur adjoint correspondant est noté avec un indice supérieur, $\tilde{u}^\epsilon(\{p\}) = u_\epsilon(\{p\})^+ i\gamma^o$, et la formule de Bouchiat-Michel [Bo.Mi.58] s'écrit

$$u_\epsilon(\{p\}) \otimes \tilde{u}^{\epsilon'}(\{p\}) = \frac{1}{4}\left[\delta^{\epsilon'}_{\ \epsilon} + i\gamma^5 \not{N}_i (\sigma^i)^{\epsilon'}_{\ \epsilon}\right](\not{p} + m)\ , \qquad (9)$$

où les σ^i(i= 1,2,3) sont les matrices de Pauli. Si nous sommons sur les états de polarisation, l'équation précédente devient

$$\sum_\epsilon u_\epsilon(\{p\}) \otimes \tilde{u}^\epsilon(\{p\}) = ½\,(\not{p} + m)\ . \qquad (10)$$

Pour une antiparticule, décrite par un spineur v(p), l'équation de Dirac est

$$(\not{p}+m)\,v(p) = 0 \qquad (11)$$

et la formule de Bouchiat-Michel devient :

$$v_\epsilon(\{p\}) \otimes \tilde{v}^{\epsilon'}(\{p\}) = \frac{1}{4}\left[\delta^{\epsilon'}_{\ \epsilon} + i\,\gamma^5 \not{N}_i\,(\sigma^{i*})^{\epsilon'}_{\ \epsilon}\right](\not{p}-m)\ . \qquad (12)$$

La formule (9) se généralise au cas où les spineurs décrivent deux particules différentes, de masses et impulsions m',m et $\underline{p}'$,$\underline{p}$. En

choisissant des tétrades conjuguées, i.e. $\{p'\} = L(p' \longleftarrow p)\{p\}$, on obtient

$$u_{\epsilon}(\{p'\}) \otimes \tilde{u}^{\epsilon'}(\{p\}) = \frac{1}{\sqrt{2(\underline{p}'.\underline{p}+m'm)}} \frac{1}{4} (\not{p}'+m')[\delta^{\epsilon'}_{\epsilon} + i\gamma^5 \not{N}_i (\sigma^i)^{\epsilon'}_{\epsilon}](\not{p}+m) \quad (13)$$

Soit u(k) une solution de l'équation de Dirac pour une particule de masse nulle

$$\not{k}\, u(k) = 0 \quad (14)$$

dans la théorie à deux composantes, les neutrinos sont décrits par les spineurs

$$u(k,\xi) = (1+\xi i\gamma^5)\, u(k) \quad (15)$$

où ξ est l'hélicité de la particule, $\xi = -1$ pour le neutrino et $\xi = +1$ pour l'antineutrino. Pour ces particules, la formule de Bouchiat-Michel est alors

$$u(k,\xi) \otimes \tilde{u}(k,\xi) = \frac{1}{2}(1 - i\gamma^5)\not{k} \quad (16)$$

16.3-Particules de spin entier

Les trois états de polarisation d'une particule de spin 1 de masse m et d'impulsion $\underline{p}$ peuvent être décrits par les trois quadrivecteurs $\underline{N}_n$ de la base sphérique de la tétrade $\{p\}$.

Les (2s+1) états de polarisation d'une particule de spin entier $s > 1$ sont décrits par (2s+1) tenseurs d'ordre s, $\underline{T}^{s}_{m}(\{p\})$ obtenus par récurrence à partir des quadrivecteurs $\underline{N}_n$

$$\underline{T}^{s}_{m}(\{p\}) = \langle s-1\ m'1n|sm\rangle\ \underline{T}^{s-1}_{m'}(\{p\}) \otimes \underline{N}_n \quad (17)$$

Ces tenseurs sont identiques aux tenseurs maximaux $\underline{t}^{s}_{m}(\{p\})$ définis au paragraphe 6-1 et jouissent donc de toutes les propriétés de ces derniers, cf.Eq.(6-11,12,13).

Dans le cas d'un photon d'impulsion $\underline{k}$ et de masse nulle ($\underline{k}^2 = 0$), on construit une tétrade $\{e\}$ associée à $\underline{k}$ de la manière suivante : le quadrivecteur de genre temps $\underline{e}_o$ et l'axe de quantification $\underline{e}_3$ sont tels que, cf.[Mi.Ro.61],

$$\underline{k} = (\underline{k}.\underline{e}_o)\,[\underline{e}_o - \underline{e}_3] \qquad \text{avec } \underline{k}.\underline{e}_o > 0 \quad (18)$$

et les deux autres quadrivecteurs de genre espace $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ sont orthogonaux

à $\underline{k}$

$$\underline{k}\cdot\underline{e}_1 = \underline{k}\cdot\underline{e}_2 = 0 \ . \tag{19}$$

Les deux états de polarisation circulaire droite et gauche du photon sont représentés par les quadrivecteurs $\underline{e}_+$ et $\underline{e}_-$ de la base sphérique de la tétrade $\{e\}$. Un photon polarisé elliptiquement est représenté par un quadrivecteur $\underline{\epsilon}$ tel que

$$\underline{\epsilon}\cdot\underline{k} = 0 \quad , \quad \underline{\epsilon}^*\cdot\underline{\epsilon} = -1 \tag{20}$$

Ce quadrivecteur $\underline{\epsilon}$, défini à une phase et à un quadrivecteur proportionnel à $\underline{k}$ près, peut être décomposé sur la base des quadrivecteurs $\underline{e}_+, \underline{e}_-$

$$\underline{\epsilon} = \alpha_+ \underline{e}_+ + \alpha_- \underline{e}_- \qquad \text{avec} \quad |\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1 \tag{21}$$

Si α_+ ou α_- est nul, on retrouve les états de polarisation circulaire et si $|\alpha_+| = |\alpha_-| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, le photon est polarisé linéairement. En effet, dans ce cas on peut écrire le quadrivecteur $\underline{\epsilon}$= sous la forme

$$\underline{\epsilon} = \cos\varphi\ \underline{e}_1 + \sin\varphi\ \underline{e}_2 \tag{22}$$

où φ est un nombre réel.

16.4- Particules de spin demi-entier

Les états de polarisation des particules de spin s demi-entier peuvent être décrits par les spineurs-tenseurs de Rarita-Schwinger. Les spineurs-tenseurs décrivant un spin $\underline{s = j + \frac{1}{2}}$ (j entier) sont obtenus en couplant le tenseur décrivant le spin j avec le spineur décrivant le spin ½

$$\underset{j-\sigma}{U}(\{p\}) = \langle jn\tfrac{1}{2}\epsilon \,|\, s\sigma\rangle \ \underset{j-n}{T}(\{p\})\ u_\epsilon(\{p\}) \tag{23}$$

Ces spineurs-tenseurs satisfont l'équation de Dirac, ils sont symétriques orthogonaux à l'impulsion $\underline{p}$ et aux matrices $\underline{\gamma}$, et de trace nulle

$$(\not{p}-m)\ \underset{j-\sigma}{U}(\{p\}) = 0 \ , \tag{24}$$

$$\left[\underset{j-\sigma}{U}(\{p\})\right]^{\mu_1\cdots\mu_k\cdot\mu_\ell\cdot\mu_i} = \left[\underset{j-\sigma}{U}(\{p\})\right]^{\mu_1\cdots\mu_\ell\cdot\mu_k\cdot\mu_i} \ , \tag{25}$$

$$\underset{j-\sigma}{U}(\{p\})\cdot\underline{p} = 0 \ , \tag{26}$$

$$\underset{j-\sigma}{U}(\{p\})\cdot\underline{\gamma} = 0 \ , \tag{27}$$

$$\underset{j-\sigma}{U}(\{p\}) : \underline{\underline{g}} = 0 \ . \tag{28}$$

On définit le spineur-tenseur adjoint avec un indice contravariant

$$\underset{j}{\widetilde{U}}^{\sigma}(\{p\}) = (-1)^{j} \left[\underset{j}{U}_{-\sigma}(\{p\}) \right]^{+} i\gamma^{o} \qquad (29)$$

où le signe $(-1)^{j}$ est nécessaire pour que les spineurs-tenseurs aient la même normalisation que les spineurs, cf.Eq.(7).

Le spineur-tenseur adjoint s'exprime en fonction du spineur adjoint et du tenseur complexe conjugué :

$$\underset{j}{\widetilde{U}}^{\sigma}(\{p\}) = (-1)^{j} \langle s\sigma | jn\tfrac{1}{2}\epsilon \rangle \; \underset{j}{T}_{n}(\{p\})^{*} \; \widetilde{u}^{\epsilon}(\{p\}) \qquad (30)$$

et on peut en déduire une formule de Bouchiat-Michel généralisée

$$\underset{j}{U}_{-\sigma}(\{p\}) \otimes \underset{j}{\widetilde{U}}^{\sigma'}(\{p\}) = (-1)^{j} \langle s\sigma' | jn'\tfrac{1}{2}\epsilon' \rangle \langle jn\tfrac{1}{2}\epsilon | s\sigma \rangle \left[\underset{j}{T}_{n'}(\{p\})^{*} \otimes \underset{j}{T}_{n}(\{p\}) \right] \left[u_{\epsilon}(\{p\}) \otimes \widetilde{u}^{\epsilon'}(\{p\}) \right] \qquad (31)$$

Si on calcule les coefficients-CG des relations (23) et (30), on obtient en effectuant les sommations

$$\underset{j}{U}_{-\sigma} = \sqrt{\frac{s+\sigma}{2s}} \; \underset{j}{T}_{-\sigma-\frac{1}{2}} \; u_{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{s-\sigma}{2s}} \; \underset{j}{T}_{-\sigma+\frac{1}{2}} \; u_{-\frac{1}{2}} \,, \qquad (32a)$$

$$\underset{j}{\widetilde{U}}^{\sigma} = (-)^{j} \left[\sqrt{\frac{s+\sigma}{2s}} \; \underset{j}{T}^{*}_{-\sigma-\frac{1}{2}} \; \widetilde{u}^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{s-\sigma}{2s}} \; \underset{j}{T}^{*}_{-\sigma+\frac{1}{2}} \; \widetilde{u}^{-\frac{1}{2}} \right] . \qquad (32b)$$

17 - DEVELOPPEMENT EN FACTEURS DE FORME DE RARITA-SCHWINGER DES FONCTIONS DE VERTEX QUADRIVECTORIELLES

Considérons la production d'une résonance baryonique de spin s à partir d'un nucléon initial. En représentant l'état du nucléon par un spineur et l'état final de la résonance par un spineur-tenseur, nous pouvons alors construire les fonctions de vertex d'un opérateur quadrivectoriel A. Nous écrivons la forme la plus générale de cet opérateur de manière à définir les facteurs de forme de Rarita-Schwinger, puis, en calculant les traces de matrice γ nous explicitons les fonctions de vertex quadrivectorielles. Ensuite, en quantifiant en hélicité, nous déduisons les relations entre les facteurs de forme multipolaires et ceux de Rarita-Schwinger. Enfin nous étudions les conséquences de la conservation du courant vectoriel sur ces facteurs de forme.

17.1-Facteurs de forme de Rarita-Schwinger

Soit $\underline{p}$, m et $\underline{p}'$,m' les impulsions et masses de la résonance et du nucléon initial et soit j la partie entière de s

$$j = s - \tfrac{1}{2} \qquad (1)$$

En représentant l'état du nucléon par le spineur $u_\epsilon(\{p'\})$ et l'état de la résonance par le spineur-tenseur $\underset{j}{\hat{U}}^{\sigma}(\{p\})$, on peut écrire les fonctions de vertex de l'opérateur quadrivectoriel $\underline{A}$ sous la forme

$$\begin{aligned} \underline{A}(\{p\},\{p'\})^{\sigma}_{\epsilon} &\equiv < \{p\} s\sigma | \underline{A} | \{p'\} \tfrac{1}{2}\epsilon > \\ &= \underset{j}{\hat{U}}^{\sigma}(\{p\})(\overset{j}{\cdot}) \; \underset{j+1}{\Gamma} \; u_\epsilon(\{p'\}) \end{aligned} \qquad (2)$$

où le tenseur-matrice $\underset{j+1}{\Gamma}$ représente l'opérateur $\underline{A}$ et où la sommation s'effectue sur les j premiers indices de $\underset{j+1}{\Gamma}$. Pour construire explicitement ce tenseur-matrice nous suivons la méthode de V. Florescu et P. Minnaert [Fl.Mi .68].

Le tenseur-matrice $\underset{j+1}{\Gamma}$ doit être construit avec les matrices γ et les impulsions $\underline{p}$ et $\underline{p}'$ des particules, et comme il est saturé par le spineur-tenseur, les propriétés de celui-ci restreignent la forme la plus générale de $\underset{j+1}{\Gamma}$.

La condition (16-27) implique que les matrices γ ne peuvent apparaitre que dans le dernier indice de $\underset{j+1}{\Gamma}$ et on peut écrire

$$\underset{j+1}{\Gamma} = \underset{j}{b} \otimes i\gamma, + \; \underset{j+1}{B} + \underset{j}{c} \otimes \gamma^5\gamma + \underset{j+1}{C} \; i\gamma^5 \qquad (2)$$

Les tenseurs $\underset{j}{b}$ et $\underset{j}{c}$ doivent être construits avec les impulsions $\underline{p}$ et $\underline{p}'$. Puisque les spineurs-tenseurs sont symétriques, orthogonaux à $\underline{p}$ et de trace nulle, la forme la plus générale des tenseurs $\underset{j}{b}$ et $\underset{j}{c}$ est

$$\underset{j}{b} = b \; (\overset{j}{\otimes} \underline{h}) \qquad , \qquad \underset{j}{c} = c \; (\overset{j}{\otimes} \underline{h}) \quad , \qquad (3)$$

où b et c sont des invariants de Lorentz et où $\underline{h}$ est le quadrivecteur d'hélicité associé à $\underline{p}$ dans le 2-plan $(\underline{p},\underline{p}')$, cf.(8-5). De manière analogue, on peut montrer que la forme la plus générale des tenseurs $\underset{j+1}{B}$ et $\underset{j+1}{C}$ est

$$ {}_{j+1}\underline{B} = b_1 \left(\overset{j-1}{\otimes} \underline{h}\right) \otimes \underline{g} + \left(\overset{j}{\otimes} \underline{h}\right) \otimes \left(b_2\, \underline{\hat{p}} + b_3\, \underline{h}\right) \quad , \tag{4a} $$

$$ {}_{j+1}\underline{C} = c_1 \left(\overset{j-1}{\otimes} \underline{h}\right) \otimes \underline{g} + \left(\overset{j}{\otimes} \underline{h}\right) \otimes \left(c_2\, \underline{\hat{p}} + c_3\, \underline{h}\right) \quad . \tag{4b} $$

Les 8 quantités b, b_1, b_2, b_3, c, c_1, c_2, c_3 sont les facteurs de forme de Rarita-Schwinger des fonctions de vertex de l'opérateur $\underline{A}$. Ils sont fonctions complexes des masses m et m', et du transfert $\underline{q}^2 = (\underline{p}-\underline{p}')^2$.

Dans le cas où $s = \frac{1}{2}$, on a $j = 0$, et les facteurs de forme b_1 et c_1 n'apparaissent pas, i.e. on a seulement 6 facteurs de forme, mais quel que soit s supérieur à $\frac{1}{2}$, nous n'avons que 8 facteurs de forme.

En utilisant l'expression (16-30), on peut écrire les fonctions de vertex de l'opérateur $\underline{A}$ sous la forme

$$ \underline{A}(\{p\},\{p'\})^{\sigma}_{\epsilon'} = \langle s\sigma | jn\tfrac{1}{2}\epsilon \rangle\, \tilde{u}^{\epsilon}(\{p\})\, \underline{\Gamma}^n\, u_{\epsilon'}(\{p'\}) \quad , \tag{5} $$

où l'on a défini les $2j+1$ quadrivecteurs-matrices

$$ \underline{\Gamma}^n = (-1)^j\, {}_{j}\underline{T}_n(\{p\})^{*}(\overset{j}{\cdot})\, {}_{j+1}\underline{\Gamma} \tag{6} $$

Les équations (2,3,4) permettent de les écrire sous la forme

$$ \underline{\Gamma}^n = b^n i\underline{\gamma} + \underline{B}^n + c^n \gamma^5 \underline{\gamma} + \underline{C}^n i\gamma^5 \tag{7} $$

et les quantités b^n, B^n, c^n et C^n s'expriment en fonction des facteurs de forme par

$$ b^n = \frac{b}{C_j}\, Y^j_n(\underline{h},\{p\})^{*} \tag{8a} $$

$$ c^n = \frac{c}{C_j}\, Y^j_n(\underline{h},\{p\})^{*} \tag{8b} $$

$$ \underline{B}^n = -\frac{b_1}{C_{j-1}}\, \underline{Y}^{j-1\ 1}(\underline{h},\{p\})^{j\ *}_{n} + \frac{1}{C_j}\, Y^j_n(\underline{h},\{p\})^{*}\, (b_2\, \underline{\hat{p}} + b_3 \underline{h}) \tag{9a} $$

$$ \underline{C}^n = -\frac{c_1}{C_{j-1}}\, \underline{Y}^{j-1\ 1}(\underline{h},\{p\})^{j\ *}_{n} + \frac{1}{C_j}\, Y^j_n(\underline{h},\{p\})^{*}\, (c_2\, \underline{\hat{p}} + c_3\, \underline{h}) \tag{9b} $$

où l'on a utilisé les définitions (6-16) et (6-25) des harmoniques scalaires et quadrivectorielles, le coefficient C_j étant défini en (3-57).

Si on quantifie en hélicité, la dépendance angulaire disparait dans les expressions précédentes qui deviennent

$$b^n = d_j \delta_{no} b \quad , \quad c^n = d_j \delta_{no} c \tag{10}$$

$$\underline{B}^o = d_j [b_2 \, \underline{\hat{p}} + b'_3 \, \underline{h}] \quad , \quad \underline{C}^o = d_j [c_2 \, \underline{\hat{p}} + c'_3 \, \underline{h}] \tag{11a}$$

$$\underline{B}^{\pm} = d_j \sqrt{\frac{j+1}{2j}} \, b_1 \, \underline{e}_{\mp} \quad , \quad \underline{C}^{\pm} = d_j \sqrt{\frac{j+1}{2j}} \, c_1 \, \underline{e}_{\mp} \tag{11b}$$

$$\underline{B}^n = \underline{C}^n = 0 \quad \text{pour} \quad n > 1 \, , \tag{11c}$$

où les quadrivecteurs $\underline{e}_+$ et $\underline{e}_-$ forment avec $\underline{\hat{p}}$ et $\underline{h}$ une tétrade sphérique et où l'on a posé

$$d_j = \frac{1}{C_j} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} = \sqrt{\frac{j!}{(2j-1)!!}} \tag{12}$$

$$b'_3 = b_3 - b_1 \quad , \quad c'_3 = c_3 - c_1 \tag{13}$$

Il résulte des équations (10) et (11), qu'en hélicité, on a

$$\underline{\Gamma}^n = 0 \quad \text{pour} \quad n > 1 \, , \tag{14a}$$

$$\underline{A} \, (\{p\}_h, \{p'\})^{\sigma}_{\epsilon'} = 0 \quad \text{pour} \quad |\sigma| > 3/2 \tag{14b}$$

quel que soit le spin de la résonance.

17.2-Calcul des fonctions de vertex

L'expression (5) des fonctions de vertex de l'opérateur $\underline{A}$ peut se mettre sous la forme

$$\underline{A}(\{p\},\{p'\})^{\sigma}_{\epsilon'} = \langle s\sigma | jn\tfrac{1}{2}\epsilon \rangle \, \mathrm{Tr} \left[u_{\epsilon'}(\{p'\}) \otimes \tilde{u}^{\epsilon}(\{p\}) \, \underline{\Gamma}^n \right] \tag{15}$$

Si on choisit les tétrades $\{p\}$ et $\{p'\}$ conjuguées, en utilisant l'équatio (16-13) on peut réécrire cette expression

$$\underline{A}(\{p\},p')^{\sigma}_{\epsilon'} = \langle s\sigma | jn\tfrac{1}{2}\epsilon \rangle \frac{1}{\sqrt{2(\underline{p'}.\underline{p}+m'm)}}$$

$$\frac{1}{4} \, \mathrm{Tr} \left\{ (\not{p}'+m') [\delta^{\epsilon}_{\epsilon'} + i\gamma^5 N_i (\tau^i)^{\epsilon}_{\epsilon'}] (\not{p}+m) \, \underline{\Gamma}^n \right\} \tag{16}$$

Soit X une matrice 4×4, nous lui associons la matrice 2×2 Q(X) par

$$Q(X) = \frac{1}{4} \, \mathrm{Tr} \left\{ (\not{p}'+m') \left[\mathbb{1} + i\gamma^5 N_i \, \tau^i \right] (\not{p}+m) \, X \right\} \tag{17}$$

Pour déterminer la trace de l'équation (16) il faut calculer $Q(\mathbb{1})$, $Q(i\underline{\gamma})$, $Q(\gamma_5 \underline{\gamma})$ et $Q(\gamma_5)$. A l'aide des résultats du paragraphe (16-1), on obtient

$$Q(\mathbb{1}) = (mm' + \underline{p}.\underline{p}') \, \mathbb{1} \tag{18a}$$

$$Q(i\underline{\gamma}) = (m'\underline{p}+m\underline{p}') \, \mathbb{1} - i \{p,-,p',N_i\} \, \tau^i \tag{18b}$$

$$Q(\gamma^5 \underline{\gamma}) = [(mm'+\underline{p}.\underline{p}') \, \underline{N}_i - (\underline{p}'.\underline{N}_i)\underline{p}] \, \tau^i \tag{18c}$$

$$Q(i\gamma^5) = - m \, \underline{p}.\underline{N}_i \, \tau^i \tag{18d}$$

En utilisant (7) et (18), on obtient finalement l'expression suivante des fonctions de vertex

$$\underline{A}(\{p\},p')^{\sigma}_{\epsilon'} = \langle s\sigma | jn\ \tfrac{1}{2}\epsilon \rangle \frac{1}{\sqrt{2(1+\hat{\underline{p}}.\hat{\underline{p}}')}}$$

$$\Big\{ b^n[(\hat{\underline{p}}+\hat{\underline{p}}')\,\delta^{\epsilon}_{\epsilon'} - i\,\{\hat{p},-,\hat{p}',N_i\}(\mathcal{T}^i)^{\epsilon}_{\epsilon'}] + \underline{B}^n(1+\hat{\underline{p}}.\hat{\underline{p}}') \qquad (19)$$

$$+ c^n\,[(1+\hat{\underline{p}}.\hat{\underline{p}}')\ \underline{N}_i - (\underline{p}'.\underline{N}_i)\ \hat{\underline{p}}](\mathcal{T}_i)^{\epsilon}_{\epsilon'} - \underline{C}^n(\hat{\underline{p}}.N_i)(\mathcal{T}^i)^{\epsilon}_{\epsilon} \Big\}$$

où les expressions de b^n, $\underline{B}^n$, c^n, $\underline{C}^n$ sont données en (8) et (9).

En hélicité les matrices Q s'écrivent sous la forme

$$Q(\mathbb{1}) = mm'\,\omega_+^2\,\mathbb{1} \qquad (20a)$$

$$Q(i\underline{\gamma}) = mm'\,\omega_+\,[(\omega_+\hat{\underline{p}} + \omega_-\underline{h})\,\mathbb{1} + \omega_-(\underline{e}_-\mathcal{T}_+ - \underline{e}_+\mathcal{T}_-)] \qquad (20b)$$

$$Q(\gamma_5\underline{\gamma}) = mm'\,\omega_+[(\omega_-\hat{\underline{p}}+\omega_+\underline{h})\,\mathcal{T}_o - \omega_+(\underline{e}_-\mathcal{T}_+ + \underline{e}_+\mathcal{T}_-)] \qquad (20c)$$

$$Q(\gamma_5) = mm'\,\omega_+\omega_-\,\mathcal{T}_o \qquad (20d)$$

où l'on a défini

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\hat{\underline{p}}.\hat{\underline{p}}' \pm 1}\ , \qquad (21)$$

et où $\mathcal{T}_o$, $\mathcal{T}_+$, $\mathcal{T}_-$ sont les matrices de Pauli dans la base sphérique

$$\mathcal{T}_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ ,\ \mathcal{T}_+ = -\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \mathcal{T}_- = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (22)$$

Donc, en hélicité, les seules fonctions de vertex non nulles sont, en utilisant les équations (10) et (11)

$$\underline{A}^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}} = \frac{d_s}{\sqrt{2}}\Big\{[\omega_+(b+b_2)\pm\omega_-(c+c_2)]\hat{\underline{p}} + [\omega_-b+\omega_+b_3'\pm(\omega_+c+\omega_-c_3')]\ \underline{h}\Big\}$$

$$\underline{A}^{\mp\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}} = \frac{d_s}{2}\,[\omega_+b_1 - 2\omega_-b \pm(\omega_-c_1 - 2\omega_+c)]\ \underline{e}_{\pm} \qquad (23)$$

$$\underline{A}^{\pm 3/2}_{\pm\frac{1}{2}} = \frac{d_s}{2}\sqrt{\frac{2s+3}{2s-1}}\ (\omega_+b_1 \pm \omega_-c_1)\ \underline{e}_{-}$$

avec

$$d_s = \sqrt{\frac{s+\frac{1}{2}}{2s}}\ d_j = \sqrt{\frac{(s+\frac{1}{2})!}{(2s)!!}} \qquad (24)$$

Dans une tétrade de référence $\{e\}$ dont les quadrivecteurs $\underline{e}$ et $\underline{e}_3$ sont dans le 2-plan $(\underline{p},\underline{p}')$ et dont les deux autres axes sont les quadrivecteurs $\underline{e}_{\pm}$, les composantes sphériques non nulles de ces fonctions de vertex sont

$$
\begin{aligned}
\left[\underline{A}^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^{0}_{0} &= \frac{d_s}{\sqrt{2}}\left\{\left[\omega_+(b+b_2)\pm\omega_-(c+c_2)\right]\hat{\underline{p}}\cdot\underline{e} + \left[\omega_- b+\omega_+ b'_3 \pm(\omega_+ c+\omega_- c'_3)\right]\underline{h}\cdot\underline{e}\right\} \\
\left[\underline{A}^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^{1}_{0} &= -\frac{d_s}{\sqrt{2}}\left\{\left[\omega_+(b+b_2)\pm\omega_-(c+c_2)\right]\hat{\underline{p}}\cdot\underline{e}_3 + \left[\omega_- b+\omega_+ b'_3 \pm(\omega_+ c+\omega_- c'_3)\right]\underline{h}\cdot\underline{e}_3\right\} \\
\left[\underline{A}^{\mp\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^{1}_{\mp} &= \frac{d_s}{2}\left[\omega_+ b_1 - 2\omega_- b \pm (\omega_- c_1 - 2\omega_+ c)\right] \\
\left[\underline{A}^{\pm 3/2}_{\pm\frac{1}{2}}\right]^{1}_{\pm} &= \frac{d_s}{2}\sqrt{\frac{2s+3}{2s-1}}\,(\omega_+ b_1 \pm \omega_- c_1)
\end{aligned}
\qquad (25)
$$

17.3-Relation entre les facteurs de forme multipolaires et ceux de Rarita-Schwinger

Pour relier les facteurs de forme multipolaires aux facteurs de forme de Rarita-Schwinger, il faut identifier les expressions ci-dessus avec les développements (28-11), en tenant compte de la parité. Par construction, un spineur et un spineur-tenseur décrivant une particule de spin s ont une parité relative

$$\epsilon_1 \epsilon_2 = (-1)^{s-\frac{1}{2}} \qquad (26)$$

Le tenseur matrice $_{j+1}\underline{\Gamma}$ peut se décomposer sous la forme

$$_{j+1}\underline{\Gamma} = \left[\,_j\underline{b} \otimes i\underline{\gamma} + \,_{j+1}\underline{B}\right] + \left[\,_j\underline{c} \otimes i\underline{\gamma} + \,_{j+1}\underline{C}\right] i\gamma^5 \qquad (27)$$

où les deux quantités entre crochets ont la parité intrinsèque +1. Comme la multiplication par γ^5 inverse la parité du second tenseur, on peut décomposer les fonctions de vertex de l'opérateur $\underline{A}$ en deux termes de parités opposées :

$$_j\underline{\hat{U}}^{\sigma}(\overset{j}{.})\left[\,_j\underline{b} \otimes i\underline{\gamma} + \,_{j+1}\underline{B}\right] u_\epsilon \quad \text{a la parité} \quad \epsilon\epsilon_1\epsilon_2 = (-1)^{s-\frac{1}{2}}, \qquad (28a)$$

$$_j\underline{\hat{U}}^{\sigma}(\overset{j}{.})\left[\,_j\underline{c} \otimes i\underline{\gamma} + \,_{j+1}\underline{C}\right] i\gamma^5 u_\epsilon \quad \text{a la parité} \quad \epsilon\epsilon_1\epsilon_2 = (-)^{s+\frac{1}{2}} \qquad (28b)$$

L'identification des équations (25) et (11-28) donne

$$\mathcal{E}_t(e)^{s-\frac{1}{2}} = D_s[\omega_+(b+b_2)\underline{\hat{p}}\cdot\underline{e} + (\omega_- b+\omega_+ b'_3)\ \underline{h}\cdot\underline{e}] \tag{29a}$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(e)^{s-\frac{1}{2}} = D_s[\omega_+(b+b_2)\underline{\hat{p}}\cdot\underline{e}_3 + (\omega_- b+\omega_+ b'_3)\ \underline{h}\cdot\underline{e}_3] \tag{29b}$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{T}}^{s-\frac{1}{2}} = D_s\left[\sqrt{\frac{2s+1}{2s-1}}\ \omega_+ b_1 - \sqrt{\frac{2s-1}{2s+1}}\ \omega_- b\right] \tag{29c}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{s+\frac{1}{2}} = D_s\sqrt{\frac{2s+3}{2s+1}}\ \omega_- b \tag{29d}$$

$$\mathcal{E}_t(e)^{s+\frac{1}{2}} = -D_s[\omega_-(c+c_2)\underline{\hat{p}}\cdot\underline{e} + (\omega_+ c+\omega_- c'_3)\ \underline{h}\cdot\underline{e}] \tag{30a}$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(e)^{s+\frac{1}{2}} = -D_s[\omega_-(c+c_2)\underline{\hat{p}}\cdot\underline{e}_3 + (\omega_+ c+\omega_- c'_3)\ \underline{h}\cdot\underline{e}_3] \tag{30b}$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{C}}^{s+\frac{1}{2}} = -D_s\sqrt{\frac{2s+3}{2s+1}}\ (\omega_- c_1 + \omega_+ c) \tag{30c}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{T}}^{s-\frac{1}{2}} = -D_s\sqrt{\frac{2s-1}{2s+1}}\left[\frac{2\omega_- c_1}{2s-1} - \omega_+ c\right] \tag{30d}$$

où la dépendance en $\underline{q}^2$ est omise et où on a posé

$$D_s = \sqrt{\frac{4\pi}{2s+1}}\ d_s = \sqrt{\frac{2\pi(s-\frac{1}{2})!}{(2s)!!}} \tag{31}$$

Remarquons que les formules (29-a,b) et 30-a,b) se simplifient beaucoup dans le système où la résonance est au repos,i.e. $\underline{e} = \underline{\hat{p}}$, $\underline{e}_3 = \underline{h}$. Dans ce cas ces relations s'écrivent pour une résonance de spin 3/2 :

$$\mathcal{E}^1_t = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\ \omega_+(b+b_2) \qquad \mathcal{E}^2_t = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\ \omega_-(c+c_2)$$

$$\mathcal{E}^1_{\mathcal{L}} = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\ (\omega_- b+\omega_+ b'_3) \qquad \mathcal{E}^2_{\mathcal{L}} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\ (\omega_+ c+\omega_- c'_3) \tag{32}$$

$$\mathcal{E}^1_{\mathcal{T}} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\ (2\omega_+ b_1-\omega_- b) \qquad \mathcal{E}^2_{\mathcal{C}} = -\sqrt{\pi}\ (\omega_- c_1+\omega_+ c)$$

$$\mathcal{M}^2_{\mathcal{C}} = \sqrt{\pi}\ \omega_- b \qquad \mathcal{M}^1_{\mathcal{T}} = -\sqrt{\frac{\pi}{3}}\ (\omega_- c_1 - \omega_+ c)$$

17.4-Conservation du courant vectoriel

On appelle "courant vectoriel", la partie de l'opérateur quadri-vectoriel ayant pour parité intrinsèque +1. Donc si les deux particules ont la parité relative $(-1)^{s-\frac{1}{2}}$, le courant vectoriel est

$$\underline{V}^{\sigma}_{\epsilon} = {}_j\underline{\tilde{U}}^{\sigma}(\overset{j}{\cdot})\ [{}_j\underline{b} \otimes i\ \underline{\gamma} + {}_{j+1}\underline{B}]\ u_{\epsilon} \qquad \text{si } \epsilon_1\epsilon_2 = (-1)^{s-\frac{1}{2}} \tag{33a}$$

Par contre si les deux particules ont pour parité relative $(-1)^{s+\frac{1}{2}}$, on décrit la résonance par le produit du spineur-tenseur et de la matrice $i\gamma^5$, et dans ce cas le courant vectoriel est

$$\underline{V}^{\sigma}_{\epsilon} = ({}_j\underline{\tilde{U}}^{\sigma}\ i\gamma^5)(\overset{j}{\cdot})[-{}_j\underline{c} \otimes i\underline{\gamma} + {}_{j+1}\underline{C}]\ u_{\epsilon} \quad \text{si } \epsilon_1\epsilon_2 = (-1)^{s+\frac{1}{2}} \tag{33b}$$

La condition de conservation du courant vectoriel se traduit simplement sur les fonctions de vertex par

$$\underline{V}^{\sigma}_{\epsilon} \cdot \underline{q} = 0 \tag{34}$$

et en utilisant les expressions (23) des fonctions de vertex on obtient la contrainte sur les facteurs de forme de Rarita-Schwinger dans les deux cas de parité

$$\omega_+(b+b_2)\hat{\underline{p}}\cdot\underline{q} + (\omega_- b+\omega_+ b'_3)\underline{h}\cdot\underline{q} = 0 \quad \text{si } \epsilon_1\epsilon_2 = (-1)^{s-\frac{1}{2}} \tag{35a}$$

$$\omega_-(c+c_2)\hat{\underline{p}}\cdot\underline{q} + (\omega_+ c+\omega_- c'_3)\underline{h}\cdot\underline{q} = 0 \quad \text{si } \epsilon_1\epsilon_2 = (-1)^{s+\frac{1}{2}} \tag{35b}$$

Les identités

$$\underline{h}\cdot\underline{q} = m'\omega_+\omega_- \tag{36}$$

$$\hat{\underline{p}}\cdot\underline{q} = m'[\Delta - \omega_-^2] \tag{37}$$

avec

$$\Delta = \frac{m - m'}{m'} \tag{38}$$

permettent d'écrire ces conditions sous la forme

$$\boxed{\Delta b + (\Delta - \omega_-^2)b_2 + \omega_+\omega_- b'_3 = 0 \quad \text{si } \epsilon_1\epsilon_2 = (-1)^{s-\frac{1}{2}}} \tag{39a}$$

$$\boxed{2\Delta c + (\Delta-\omega_-^2)c_2 + \omega_+\omega_- c'_3 = 0 \quad \text{si } \epsilon_1\epsilon_2 = (-1)^{s+\frac{1}{2}}} \tag{39b}$$

Notons que ces relations peuvent être obtenues en utilisant les conditions sur les facteurs de forme multipolaires établies au §11-5 et les relations de passage entre ces facteurs de forme et ceux de Rarita-Schwinger.

T R O I S I E M E P A R T I E

QUELQUES PROBLEMES DE POLARISATION

CHAPITRE SIXIEME

MESURES DE POLARISATION ET POSITIVITE

18 - RAPPELS SUR L'OPERATEUR DENSITE DE POLARISATION

Cette section rassemble les propriétés essentielles de l'opérateur densité de polarisation, du domaine de polarisation et des paramètres du développement multipolaire de l'opérateur densité. Toutes ces questions ont été étudiées de façon très systématique par Doncel, Michel et Minnaert, voir par exemple les cours donnés aux écoles d'été de Gif 1970 [Do.Mi.Mi.70] et des Houches 1971 [Min.71]. En ce qui concerne la paramétrisation des matrices densité de dimension 2 nous renvoyons au cours de L. Michel [Mic.64].

18.1-Opérateur densité et domaine de polarisation

Les états purs de polarisation d'une particule d'impulsion $\underline{p}$ forment un espace de Hilbert $\mathcal{H}_n(p)$ de dimension : $n = 2j+1$ pour une particule de spin j et de masse positive, $n = 2$ pour un photon, $n = 1$ pour un neutrino de masse nulle à deux composantes. Un état général de polarisation est un "mélange" et il est décrit par un opérateur densité agissant dans $\mathcal{H}_n(p)$, $\rho(p)$, hermitique, défini positif, et de trace unité,

$$\rho(p)^\dagger = \rho(p) \qquad (1a)$$

$$\langle x|\rho(p)|x\rangle \geqslant 0, \quad \forall |x\rangle \in \mathcal{H}_n(p) \qquad (1b)$$

$$\mathrm{tr}\ \rho(p) = 1 \ . \qquad (1c)$$

L'opérateur densité $\rho(p)$ appartient à l'espace à n^2 dimensions des opérateurs linéaires dans $\mathcal{H}_n(p)$ noté

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}_n) = \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_n^* \qquad (2)$$

Nous pouvons munir cet espace d'une métrique hermitique en définissant le produit scalaire et la norme

$$(R_1, R_2) = \frac{n}{n-1}\ \mathrm{tr}\ (R_1^\dagger R_2) \qquad (3a)$$

$$\|R\| = \sqrt{(R,R)} \qquad (3b)$$

Dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, l'ensemble des opérateurs hermitiques de trace unité, forme un sous-espace euclidien $\mathcal{E}$ de dimension n^2-1 et dans

le sous-espace $\mathcal{E}$ la condition tr $\rho^2 = 1$ définit une sphère $\mathcal{S}$ de dimension n^2-1, de rayon unité et de centre

$$\rho_o = \frac{1}{n} I \quad . \tag{4}$$

L'opérateur ρ_o qui représente l'état non polarisé est tel que tr $\rho_o^2 = \frac{1}{n}$, les projecteurs $\rho^2 = \rho$ décrivent les états purs et vérifient tr $\rho^2 = 1$, tandis que pour un opérateur densité quelconque on a

$$\frac{1}{n} \leqslant \text{tr } \rho^2 \leqslant 1 \quad . \tag{5}$$

La condition de positivité (1b) implique que l'ensemble des opérateurs densité $\rho(p)$ forme un domaine convexe, contenant ρ_o, appelé domaine de polarisation et noté $\mathcal{D}_j$. Ce domaine $\mathcal{D}_j$ est inclus dans la sphère unité $\mathcal{S}$. En effet, la distance d'un opérateur densité $\rho(p)$ quelconque au centre ρ_o, appelé degré de polarisation et noté d_ρ, est

$$d_\rho = \|\rho - \rho_o\| = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\text{tr } \rho^2 - \frac{1}{n}\right)} \leqslant 1 \quad . \tag{6}$$

La frontière du domaine $\mathcal{D}_j$ est donnée par l'équation

$$\det \rho(p) = 0 \quad , \tag{7}$$

ce qui signifie que les éléments de cette frontière sont des opérateurs de rang inférieur à n.

Il faut noter que les états purs (de rang 1) appartiennent à la sphère $\mathcal{S}$, mais que, excepté dans le cas n = 2, un élément de $\mathcal{S}$ n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{D}_j$.

Le domaine de polarisation jouit d'une propriété remarquable, il est globalement invariant dans la transformation par polaire réciproque par rapport à une sphère imaginaire de rayon $\frac{i}{\sqrt{2j}}$. Il en résulte que si on coupe ce domaine par un hyperplan passant par ρ_o, la projection de $\mathcal{D}_j$ sur ce plan et, l'intersection de $\mathcal{D}_j$ par ce même-plan, sont transformées l'une de l'autre par la transformation géométrique précédente. Cette propriété est très utile pour déterminer la projection à partir de l'intersection.

18.2-Matrice densité et paramètres multipolaires

On appelle matrice densité, la matrice $\rho(\{p\})$ qui représente l'opérateur densité dans la base $|\{p\}m\rangle$ de $\mathcal{H}_n$:

$$\rho(\{p\})^m{}_n = \langle\{p\}m|\rho(p)|\{p\}n\rangle = \mathrm{tr}\,(\rho(p)|\{p\}n\rangle\langle\{p\}m|) \qquad (8)$$

Ces éléments peuvent être considérés comme les composantes de l'opérateur $\rho(p)$ sur la base $|\{p\}n\rangle\langle\{p\}m|$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Comme l'opérateur densité, la matrice densité est hermitique, définie positive et de trace unité.

Les éléments de base $|\{p\}n\rangle\langle\{p\}m|$ et donc les éléments de matrice densité, ne sont pas irréductibles, ils se transforment, dans une rotation de la tétrade selon la loi

$$\rho(R\{p\})^m{}_n = D^j(R^{-1})^m{}_{m'}\ \rho(\{p\})^{m'}{}_{n'}\ D^j(R)^{n'}{}_n \ . \qquad (9)$$

En réduisant le produit de représentations à l'aide des coefficients-CG on construit une nouvelle base d'opérateurs

$$T^L_M(\{p\}) = \langle jm|jnLM\rangle\ |\{p\}m\rangle\langle\{p\}n|\ , \qquad (10)$$

qui se transforment par rotation comme les composantes d'un opérateur tensoriel irréductible

$$T^L_M(R\{p\}) = T^L_{M'}(\{p\})\ D^L(R)^{M'}{}_M \ . \qquad (11)$$

et qui satisfont la relation d'orthogonalité

$$\mathrm{tr}\,(T^{L\dagger}_M\ T^{L'}_{M'}) = \frac{2j+1}{2L+1}\ \delta_{LL'}\ \delta_{MM'} \ . \qquad (12)$$

Les opérateurs $T^{L\dagger}_M$ ne sont pas hermitiques mais ils vérifient la relation

$$T^{L\dagger}_M = (-1)^M\ T^L_{-M} \ . \qquad (13)$$

Les paramètres multipolaires $t^L_M(\{p\})$ sont les composantes de l'opérateur densité sur la base des opérateurs $T^L_M(\{p\})$ et ils sont définis par

$$\rho(p) = \sum_L \frac{2L+1}{2j+1}\ t^L_M(\{p\})^*\ T^L_M(\{p\}) \ . \qquad (14)$$

L'équation (12) permet d'inverser cette relation et de déduire la relation entre les paramètres t^L_M et les éléments de matrice densité

$$t^L_M(\{p\}) = \mathrm{tr}\,[\rho(p)\ T^L_M(\{p\})] = \langle jm|jnLM\rangle\ \rho^n{}_m(\{p\}) \ . \qquad (15)$$

Comme l'opérateur densité est hermitique et que les opérateurs T^L_M ne le sont pas, les paramètres t^L_M ne sont pas réels, cependant, ils satisfont

l'identité

$$t_M^{L*} = (-1)^M t_{-M}^L \quad . \qquad (17)$$

Dans une rotation, les paramètres t_M^L se transforment de manière inverse des opérateurs T_M^L, soit

$$t_M^L(R\{p\}) = t_{M'}^L(\{p\})\ D^L(R^{-1})^{M'}{}_M \quad . \qquad (18)$$

Les opérateurs T_M^L présentent l'inconvénient de ne pas être hermitiques, aussi, en suivant Doncel, Michel et Minnaert, nous construisons à partir des T_M^L les opérateurs hermitiques Q_M^L par

$$Q_o^L = \frac{1}{n}\sqrt{(n-1)(2L+1)}\ \ T_o^L \quad , \qquad (19a)$$

$$Q_M^L = \frac{1}{n}\sqrt{(n-1)(2L+1)}\ \ \frac{(-1)^M}{\sqrt{2}}\ \left[T_M^L + T_M^{L\dagger}\right] \text{ pour } M>0 \quad , \qquad (19b)$$

$$Q_M^L = \frac{1}{n}\sqrt{(n-1)(2L+1)}\ \ \frac{(-1)^M}{i\sqrt{2}}\ \left[T_M^L - T_M^{L\dagger}\right] \text{ pour } M<0 \quad . \qquad (19c)$$

Ces opérateurs hermitiques forment une base orthonormée, au sens du produit scalaire (3)

$$(Q_M^L, Q_{M'}^{L'}) = \delta_{LL'}\ \delta_{MM'} \quad . \qquad (20)$$

Les coefficients réels de la composition de l'opérateur densité sur les opérateurs Q_M^L sont appelés les paramètres multipolaires réels r_M^L. Ils sont définis par

$$\rho = \sum_{L=0}^{n-1}\ \sum_{M=-L}^{+L} r_M^L\ Q_M^L \qquad (21a)$$

ou inversement

$$r_M^L = (Q_M^L, \rho) \quad . \qquad (21b)$$

Les paramètres réels r_M^L se déduisent des t_M^L par

$$r_o^L = \sqrt{\frac{2L+1}{n-1}}\ \ t_o^L \quad , \qquad (22a)$$

$$r_M^L = (-1)^M \sqrt{\frac{2L+1}{n-1}}\ \sqrt{2}\ \mathrm{Re}\ (t_M^L) \quad \text{pour } M > 0 \quad , \qquad (22b)$$

$$r_M^L = (-1)^M \sqrt{\frac{2L+1}{n-1}}\ \sqrt{2}\ \mathrm{Im}\ (t_M^L) \quad \text{pour } M < 0 \quad . \qquad (22c)$$

En remarquant que $Q_o^o = \sqrt{n-1}\ \rho_o$ et $r_o^o = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$, on peut écrire le développement (19a) sous la forme

$$\rho = \rho_o + \sum_{L=1}^{n-1}\ \sum_{M=-L}^{+L} r_M^L\ Q_M^L \quad , \qquad (23)$$

et en tenant compte de l'orthogonalité des opérateurs Q_M^L, le degré de

polarisation s'écrit simplement

$$d_\rho^2 = \|\rho - \rho_o\|^2 = \sum_{L=1}^{n-1} \sum_{M=-L}^{+L} (r_M^L)^2 \quad . \tag{24}$$

Les matrices $[Q_M^L]$ qui représentent les opérateurs Q_M^L sur la base des états $|\{p\}n\rangle$, et les paramètres réels r_M^L sont des généralisations à une dimension quelconque des matrices de Pauli et du vecteur de polarisation de Stokes, que nous étudions au paragraphe suivant, dans le cas où n = 2. En effet, en utilisant les définitions des opérateurs Q_M^L, on obtient dans ce cas

$$[Q_o^1] = \frac{1}{2}\,\mathcal{T}^3 \quad , \quad [Q_1^1] = \frac{1}{2}\,\mathcal{T}^1 \quad , \quad [Q_{-1}^1] = \frac{1}{2}\,\mathcal{T}^2 \tag{25}$$

18.3-Vecteur de Stokes des matrices densité de dimension 2

Les matrices densité 2×2 peuvent être décomposées sur la base des matrices de Pauli

$$\rho(\{p\})^\epsilon{}_{\epsilon'} = \frac{1}{2}\left[\delta^\epsilon{}_{\epsilon'} + \vec{\zeta}(\{p\})\,(\vec{\mathcal{T}})^\epsilon{}_{\epsilon'}\right] \tag{26}$$

Le trivecteur $\vec{\zeta}(\{p\})$ ainsi défini est le vecteur de polarisation de Stokes, il est de longueur inférieure ou égale à 1, $\vec{\zeta}(\{p\})^2 \leqslant 1$, l'égalité correspondant aux états purs. En inversant la définition (26), on obtient

$$\vec{\zeta}(\{p\}) = \mathrm{tr}\left[\rho(\{p\})\,\vec{\mathcal{T}}\right] \quad . \tag{27}$$

Pour les états purs on peut construire explicitement la matrice densité à l'aide des spineurs pour les particules de spin ½ et à l'aide des quadrivecteurs pour les photons, cf.Sec.16.

Soit u(p,z) un spineur décrivant une particule complètement polarisée dans la direction $\underline{z}$, ($\underline{z}\cdot\underline{p} = 0$, $\underline{z}^2 = -1$). En tenant compte de la normalisation des spineurs, l'opérateur densité correspondant s'écrit

$$\rho(p,z) = u(p,z) \otimes \tilde{u}(p,z)\,\frac{i\gamma^o}{p^o} \tag{28}$$

soit en utilisant la formule de Michel-Wightman [Mi .Wi .55], cas particulier de la formule de Bouchiat-Michel

$$\rho(p,z) = \frac{1}{4}\,(1+i\gamma^5 \not{z})(\not{p}+m)\,\frac{i\gamma^o}{p^o} \quad . \tag{29}$$

Les éléments de matrice densité de l'opérateur $\rho(p,z)$ sont alors

$$\rho(\{p\},z)^\epsilon{}_{\epsilon'} = \tilde{u}^\epsilon(\{p\})\rho(p,z)\,u_{\epsilon'}(\{p\}) \quad , \tag{30}$$

$$= \mathrm{tr}\left[u_{\epsilon'}(\{p\}) \otimes \tilde{u}^\epsilon(\{p\})\,\rho(p,z)\right] \quad .$$

En utilisant la formule de Bouchiat-Michel et en effectuant la trace, on obtient

$$\rho(\{p\},z)^{\epsilon}_{\epsilon'} = \frac{1}{2}\left[\delta^{\epsilon}_{\epsilon'} - \underline{z}\cdot\underline{N}_i\,(\tau^i)^{\epsilon}_{\epsilon'}\right] , \qquad (31)$$

soit en identifiant avec (26)

$$\zeta^i(\{p\}) = -\,\underline{z}\cdot\underline{N}_{(i)} , \qquad (32)$$

i.e. $\vec{\zeta}$ est la partie d'espace de $\underline{z}$ dans le système où la particule est au repos.

De même, soit $\underline{\epsilon}$ le quadrivecteur qui représente un photon d'impulsion $\underline{k}$, complètement polarisé, (cf. §16.3). L'opérateur densité qui décrit l'état de polarisation du photon est

$$\rho(k,\epsilon) = \underline{\epsilon} \otimes \underline{\epsilon}^* . \qquad (33)$$

Dans la tétrade $\{e\}$ associée au photon, les éléments de matrice densité sont

$$\rho(\{e\},k,\epsilon)^{n}_{n'} = (\underline{e}^*_n\cdot\underline{\epsilon})(\underline{\epsilon}^*\cdot\underline{e}_{n'}) \qquad (34)$$

Si on décompose le quadrivecteur $\underline{\epsilon}$ sur $\underline{e}_+$ et $\underline{e}_-$,

$$\underline{\epsilon} = \alpha_+\underline{e}_+ + \alpha_-\underline{e}_- \qquad (35)$$

la relation (27) donne alors

$$\zeta^1(\{e\}) = 2\ \mathrm{Re}\,(\alpha^*_+\alpha_-) , \qquad (36a)$$

$$\zeta^2(\{e\}) = 2\ \mathrm{Im}\,(\alpha^*_+\alpha_-) , \qquad (36b)$$

$$\zeta^3(\{e\}) = |\alpha_+|^2 - |\alpha_-|^2 . \qquad (36c)$$

Si le photon est polarisé circulairement, on a

$$\underline{\epsilon} = \underline{e}_{\pm} \Rightarrow \zeta_1(\{e\}) = \zeta_2(\{e\}) = 0 , \quad \zeta_3(\{e\}) = \pm 1 , \qquad (37)$$

tandis que si le photon est polarisé linéairement, on a

$$\underline{\epsilon} = \cos\varphi\ \underline{e}_1 + \sin\varphi\ \underline{e}_2 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \zeta^1(\{e\}) = -\cos 2\varphi \\ \zeta^2(\{e\}) = -\sin 2\varphi \\ \zeta^3(\{e\}) = 0 . \end{array}\right. \qquad (38)$$

18.4-Opérateur densité d'un système de deux particules

Un état quelconque de polarisation d'un système de deux particules de spins j_1 et j_2 peut être décrit par un opérateur densité de polarisation $\rho(1,2)$ agissant dans l'espace $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n_1} \otimes \mathcal{H}_{n_2}$ avec $n = n_1 n_2, n_1 = 2j_1+1$

$n_2=2j_2+1$. L'opérateur densité d'une des particules s'obtient en prenant la trace de $\rho(1,2)$ dans l'espace de l'autre particule

$$\rho(1) = \mathrm{tr}_2\, \rho(1,2) \quad , \quad \rho(2) = \mathrm{tr}_1\, \rho(1,2) \quad . \tag{39}$$

On peut toujours décomposer l'opérateur densité du système sous la forme

$$\rho(1,2) = \rho(1) \otimes \rho(2) + \rho_C \quad , \tag{40}$$

où ρ_C est, par définition l'opérateur de corrélation. Il est hermitique et de trace nulle

$$\rho_C^\dagger = \rho_C \quad , \quad \mathrm{tr}\, \rho_C = 0 \quad . \tag{41}$$

Les opérateurs $\rho(1)$,$\rho(2)$ et ρ_C ont les deux propriétés fondamentales suivantes, résultant de la positivité de $\rho(1,2)$:

Propriété 1. Si une particule est complètement polarisée, alors la corrélation est nulle

$$\mathrm{tr}\, \rho_i^2 = 1 \quad \text{pour} \quad i = 1 \text{ ou } 2 \quad \Rightarrow \quad \rho_C = 0 \tag{42}$$

Propriété 2. Si la corrélation est maximale, alors les particules ne sont pas polarisées

$$\mathrm{tr}\, \rho_C^2 = \mathrm{tr}\, \rho(1,2)^2 - \frac{1}{n_1 n_2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tr}\, \rho_1^2 = \frac{1}{n_1} \quad , \quad \mathrm{tr}\, \rho_2^2 = \frac{1}{n_2} \quad . \tag{43}$$

L'opérateur densité $\rho(1,2)$ peut être développé sur la base des opérateurs $T_M^L(\{p_1\}) \otimes T_M^{L'}(\{p_2\})$, et les paramètres multipolaires joints $t_{MM'}^{LL'}$ dépendent alors des deux tétrades $\{p_1\}$ et $\{p_2\}$, ils sont définis par

$$\rho(1,2) = \sum_{L,L'} \sum_{M,M'} \frac{(2L+1)(2L'+1)}{(2j_1+1)(2j_2+1)}\, t_{MM'}^{LL'*}\, T_M^L(\{p_1\}) \otimes T_M^{L'}(\{p_2\}) \tag{44}$$

18.5-Opérateur densité et distribution angulaire dans une transition

Considérons un état initial à une ou deux particules décrit par un opérateur densité ρ_i ($\mathrm{tr}\, \rho_i = 1$) agissant dans un espace $\mathcal{H}_i$ et une transition induite par un opérateur T vers un espace final $\mathcal{H}_f$ à deux particules finales. Alors l'état final est décrit par un opérateur densité $\tilde{\rho}_f$ agissant dans $\mathcal{H}_f$ et défini par

$$\tilde{\rho}_f = T\, \rho_i\, T^\dagger \quad . \tag{45}$$

Remarquons d'abord que l'opérateur $\tilde{\rho}_f$ n'est pas normalisé,i.e. $\mathrm{tr}\, \tilde{\rho}_f \neq 1$.

En outre, le rang d'un produit de matrices étant inférieur ou égal au plus petit des rangs des matrices du produit, on a toujours

$$Rg\ (\tilde{\rho}_f) \leqslant Rg\ (\rho_i) \qquad (46)$$

Par exemple, si on étudie la diffusion d'une particule complètement polarisée sur une cible de spin ½ non polarisée, le rang de l'opérateur initial est 2, et quels que soient les spins des particules finales, le rang de l'opérateur final sera inférieur ou égal à 2.

La trace de l'opérateur $\tilde{\rho}_f$ est la probabilité de transition $W(\Omega)$ dans une direction repérée par un angle solide Ω,

$$W(\Omega) = tr\ \tilde{\rho}_f \quad , \qquad (47)$$

Remarquons que $W(\Omega)$ dépend linéairement de l'opérateur ρ_i, mais que la probabilité totale de transition

$$W = \int W(\Omega)\ d\Omega \qquad (48)$$

n'en dépend plus.

On définit la distribution angulaire $I(\Omega)$ et l'opérateur densité normalisé ρ_f par

$$I(\Omega) = \frac{W(\Omega)}{W} \quad , \qquad (49)$$

$$\rho_f = \frac{\tilde{\rho}_f}{tr\ \tilde{\rho}_f} = \frac{\tilde{\rho}_f}{W(\Omega)} \quad , \qquad (50)$$

La distribution angulaire $I(\Omega)$ dépend linéairement de l'opérateur ρ_i tandis que l'opérateur normalisé ρ_f a une dépendance plus compliquée. Cependant, la distribution angulaire de polarisation

$$I(\Omega)\ \rho_f = \frac{\tilde{\rho}_f}{W} = \frac{\tilde{\rho}_f}{\int tr\ \tilde{\rho}_f\ d\Omega} \qquad (51)$$

dépend elle-aussi linéairement de l'opérateur ρ_i.

19 - REMARQUES SUR LES MESURES DE POLARISATION

Dans cet article, écrit en collaboration avec G. Massas, L. Michel et P. Minnaert nous insistons sur la nécessité de vérifier la positivité d'une mesure de polarisation avant de tester un modèle théorique. Nous définissons deux paramètres λ et μ qui permettent d'estimer quantitativement la précision d'une mesure et sa compatibilité avec la condition de positivité.

Pour illustrer notre discussion nous considérons la production d'une résonance de spin 3/2 dans une réaction B-symétrique, c'est-à-dire une réaction conservant la parité avec un faisceau et une cible non polarisés qui est soit à quasi-deux-corps soit analysée inclusivement. Comme application, nous étudions les résultats d'un article expérimental sur la mesure de la polarisation d'un $Y^*(1385)$ produit dans les réactions à quasi-deux-corps ou inclusives suivantes

$$\pi^+ p \longrightarrow K^+ Y^{*+} \quad , \quad K^- p \longrightarrow \pi^- Y^{*+}$$

$$\pi^+ p \longrightarrow Y^{*+} X^+ \quad , \quad \pi^- p \longrightarrow Y^{*+} X^-$$

Cette résonance Y^{*+} est particulièrement intéressante puisque la séquence de désintégrations,

$$Y^{*+} \longrightarrow \Lambda^o \pi^+ \quad , \quad \Lambda^o \longrightarrow p \pi^+$$

la première se faisant par interactions fortes et la seconde par interactions faibles, permet de mesurer complètement la matrice densité du Y^{*+}.

Nuclear Physics B53 (1973) 303–312. North-Holland Publishing Company

SOME REMARKS ON POLARIZATION MEASUREMENT AND POLARIZATION DOMAIN

M. DAUMENS, G. MASSAS and P. MINNAERT
Laboratoire de Physique Théorique, Université de Bordeaux I †,
33170 Gradignan, France

and

L. MICHEL
Institut des Hautes Etudes Scientifiques,
91440 Bures Sur Yvette, France

Received 4 December 1972

Abstract: We emphasize that any analysis of polarization measurement must be done in terms of the polarization domain which is much smaller than the domain of physical bounds. We propose a possible quantitative procedure to estimate the precision of a measurement and its compatibility with the positivity condition. We illustrate our discussion with the case of spin-$\frac{3}{2}$ particles and as an application we study some experimental results on $Y^*(1385)$.

1. Introduction

In this paper we make some comments on the measurement of particle polarization in high-energy physics. In collaboration with M.G. Doncel, two of us (L.M. and P.M.) have lectured and written detailed notes on this subject [1, 2]. However, we feel necessary to refer again to this problem and emphasize some important points.

To illustrate our discussion we consider the non-trivial case of a spin-$\frac{3}{2}$ resonance, produced in a B-symmetric reaction [1, 2] (i.e. a parity-conserving reaction with unpolarized beam and target which is either a quasi-two-body reaction or a reaction analysed inclusively). As an application we study the results of an interesting experimental paper [3] which appeared recently. This paper, which will be referred to as AW, deals with the polarization of a $Y^*(1385)$ produced in the reactions:

$$\pi^+ p \to K^+ Y^{*+}, \qquad K^- p \to \pi^- Y^{*+}, \tag{1}$$

$$\pi^+ p \to X^+ Y^{*+}, \qquad K^- p \to X^- Y^{*+}. \tag{2}$$

† Equipe de recherche associée au CNRS.

This $Y^{**}(1385)$ is specially interesting, because from an observation of the cascade decays $Y^{**} \to \Lambda^0\pi^+$ (strong), $\Lambda^0 \to p\pi^-$ (weak) one can measure completely the density matrix of the $Y^*(1385)$ (refs. [1, 4, 5]).

2. Polarization parameters and parity conservation

The choice of the frame (helicity or transversity) and the choice of the polarization parameters (density matrix elements or multipole parameters) are a matter of taste and have no fundamental consequence. However, like the authors of AW, we find it convenient to use the transversity multipole parameters. Indeed we have defined [1, 2] a set of real parameters $r_M^{(L)}$ which are proportional to the real or imaginary parts of the T_M^L's of AW. For a spin-$\frac{3}{2}$ resonance the polarization is described by 15 parameters $r_M^{(L)}$, $L = 1, 2, 3$; $M = -L, \ldots, +L$. If the resonance is produced in a B-symmetric reaction, in transversity quantization the 8 parameters $r_M^{(L)}$ with M odd vanish [1, 2], and we are left with the 7 parameters: $r_0^{(L)}(L = 1, 2, 3)$, and $r_{s\,2}^{(L)}(L = 2, 3)$. They are related to the parameters T_M^L of AW by:

$$r_0^{(L)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, T_0^L, \tag{3a}$$

$$r_2^{(L)} = \sqrt{\tfrac{8}{3}}\ \mathrm{Re}\ T_2^L, \qquad r_{-2}^{(L)} = \sqrt{\tfrac{8}{3}}\ \mathrm{Im}\ T_2^L. \tag{3b}$$

Of course, if the 15 polarization parameters of the spin-$\frac{3}{2}$ particle are measurable, as is the case for the $Y^*(1385)$, *one must verify that the 8 parameters $r_M^{(L)}$ with M odd are zero* †. This check has been done in AW, and the result is that these $r_M^{(L)}$'s are compatible with zero to within 2 standard deviations.

3. The polarization domain

For spin-j particles the density matrix ρ is represented by a point in an N-dimensional Euclidean space, $N = (2j + 1)^2 - 1$. The coordinates of ρ must satisfy constraints due to the positivity of the density matrix. The polarization domain $\mathcal{D}$ is the domain of definition of the polarization parameters. It has a well defined shape (independently of the choice of coordinates). The main properties of $\mathcal{D}$ are: (i) $\mathcal{D}$ is convex, (ii) its interior represents the density matrices of maximal rank $2j + 1$ (among them is the unpolarized density matrix $\rho_0 = 1/(2j + 1)$), (iii) its boundary $\partial\mathcal{D}$ represents the density matrices of rank $< 2j + 1$.

The polarization degree d_ρ of $\rho \in \mathcal{D}$ is given by the distance between the representative points ρ and ρ_0. Its range of values is from 0 (for the unpolarized state)

† If this is not satisfied, most likely the presence of non-expected $Y_M^{(L)}$ in the decay angular distribution reveals the existence of interference between the resonance channel and the background.

to 1 (for the pure states). Hence $\mathcal{D}$ is inscribed inside the N-dimensional unit sphere S_N, centered at ρ_0. The expression of d_ρ in terms of multipole parameters $r_M^{(L)}$ is:

$$d_\rho = \left(\sum_{L,M} (r_M^{(L)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

As we recalled previously the density matrix of B-symmetric spin-$\frac{3}{2}$ particles is described by 7 non-vanishing parameters $r_M^{(L)}$. The seven-dimensional domain $\mathcal{D}$ has been described in ref. [1]. It is the intersection of two quadrics C_ϵ, and it is defined by the relations ($\epsilon = \pm 1$)

$$([r_2^{(2)} + \epsilon r_2^{(3)}]^2 + [r_{-2}^{(2)} + \epsilon r_{-2}^{(3)}]^2 + [r_0^{(2)} + \epsilon \frac{1}{\sqrt{5}}(2r_0^{(1)} - r_0^{(3)})]^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} + \epsilon \frac{1}{\sqrt{5}}(r_0^{(1)} + 2r_0^{(3)}). \tag{5}$$

It is interesting to compare the volume of $\mathcal{D}$ to that of the unit sphere S_7. For this it is convenient to make an orthogonal transformation in the 7-dimensional polarization space.

One defines

$$\xi_\epsilon^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [r_0^{(2)} + \epsilon \frac{1}{\sqrt{5}}(2r_0^{(1)} - r_0^{(3)})],$$

$$\xi_\epsilon^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [r_2^{(2)} + \epsilon r_2^{(3)}],$$

$$\xi_\epsilon^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [r_{-2}^{(2)} + \epsilon r_{-2}^{(3)}],$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{5}} [r_0^{(1)} + 2r_0^{(3)}]. \tag{6}$$

In these variables the polarization degree reads

$$d_\rho^2 = t^2 + \xi_+^2 + \xi_-^2, \tag{7}$$

and the equations of the sphere S_7 and of the domain $\mathcal{D}$ are

$$S_7 : t^2 + \xi_+^2 + \xi_-^2 = 1, \tag{8}$$

$$\mathcal{D} : -\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant t \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \xi_\epsilon^2 \leqslant \tfrac{1}{6}(1 + \epsilon\sqrt{3}t)^2, \tag{9}$$

where ξ_ϵ^2 is a short notation for $\Sigma_{i=1}^3 (\xi_\epsilon^{(i)})^2$.

We emphasize that $\mathcal{D}$ is much smaller than S_7. Indeed the volume of $\mathcal{D}$ is

$$V(\mathcal{D}) = \int_{-1/\sqrt{3}}^{+1/\sqrt{3}} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \left(\frac{1+t\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^3 \left(\frac{1-t\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^3 dt = \frac{64\,\pi^2}{8505\sqrt{3}} = 0.04288, \quad (10)$$

while the volume of the interior of S_7 is

$$V(S_7) = \frac{\pi^4}{\Gamma(\frac{7}{2}+1)} = 4.7248. \quad (11)$$

Hence, the ratio of the volumes is

$$V(S_7)/V(\mathcal{D}) = \tfrac{1}{4} \times 81\sqrt{3}\pi = 110.188. \quad (12)$$

The authors of AW do not verify that their three measured points belong to $\mathcal{D}$. They only verify that each parameter $r_M^{(L)}$ is inside the physical bounds which are [6]

$$|r_M^{(L)}| \leqslant \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{5}} \text{ for } r_0^{(1)} \text{ and } r_0^{(3)}, \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ for the 5 other parameters.} \end{cases} \quad (13)$$

These conditions yield a domain P whose volume is

$$V(P) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^5 (2\sqrt{\tfrac{3}{5}})^2 = 4.9267. \quad (14)$$

Note that P is bigger than S_7, and is more than one hundred times bigger than $\mathcal{D}$ (!);

$$V(P)/V(\mathcal{D}) = 114.898. \quad (15)$$

Consequently, if it is advisable to check that $\rho \in P$ and $\rho \in S_7$, *it is absolutely necessary to verify that the representative point of the measured polarization belongs to the polarization domain* $\mathcal{D}$.

4. Tests of the precision and the positivity of a polarization measurement

To estimate the precision of an experimental result $\rho_{exp} = \{r_M^{(L)}\}$, it is interesting to compare the relative sizes of the statistical † errors $\Delta r_M^{(L)}$ and of the polarization domain $\mathcal{D}$. We propose here a quantitative procedure. For given $r_M^{(L)}$ and $\Delta r_M^{(L)}$, the equation

$$\sum_{L,M} \left(\frac{x_M^{(L)} - r_M^{(L)}}{\Delta r_M^{(L)}}\right)^2 = \chi^2 \quad (16)$$

† We assume that the systematic errors are negligible. This assumption seems frequently made in experimental papers.

defines an ellipsöid E_{χ^2} in the N variables $x_M^{(L)}$. For N degrees of freedom, to each value of χ^2 corresponds a confidence level for the points on E_{χ^2} to be compatible with the experimental point $\rho_{\exp}$. The volume of E_{χ^2} is

$$V(E_{\chi^2}) = V(S_N)\left(\prod_{L,M} \Delta r_M^{(L)}\right)(\chi^2)^{\frac{1}{2}N}, \tag{17}$$

where S_N is the N-dimensional unit sphere.

To have a feeling for the precision of a measure, we choose χ^2 such that the confidence level is $\frac{1}{2}$ (e.g. for $N = 7$, $\chi^2 = 6.346$), we denote by $E(\frac{1}{2})$ the corresponding ellipsoid, and we compute the ratio

$$\lambda = V(E(\tfrac{1}{2}))/V(\mathcal{D}); \tag{18}$$

the smaller this ratio, the better the precision.

Table 1 gives the value of λ (computed from eqs. (12), (17) and (18)) for the three points measured by AW (their tables 2, 3 and 4). Of course, when a measurement is made from a small number of events, it is not astonishing that $E(\frac{1}{2})$ could be bigger than $\mathcal{D}$ (e.g. for point 1, $\lambda = 7.41$).

Table 1
Values of the parameters λ and μ for the experimental results of AW, ref. [3]

Point	1	2	3
Table of AW	2	3	4
Number of events	37	320	282
λ	7.41	0.10	0.02
$\mu <$	0.003	0.05	0.15

Furthermore we would like to take into account the statistical errors to estimate the positivity of a polarization measurement. For this we consider the intersection $\mathcal{D} \cap E(\frac{1}{2})$ of the polarization domain $\mathcal{D}$ with the ellipsoid $E(\frac{1}{2})$. The ratio μ of the volume of $\mathcal{D} \cap E(\frac{1}{2})$ to that of $E(\frac{1}{2})$,

$$\mu = V(\mathcal{D} \cap E(\tfrac{1}{2}))/V(E(\tfrac{1}{2})) \leqslant 1, \tag{19}$$

gives some quantitative information on the compatibility of the measure with the positivity condition. The bigger the ratio, the better the compatibility. Table 1 gives an upper limit to the ratio μ (computed by a Monte-Carlo method) for the three points measured by AW.

5. Comparison with theory – Two-dimensional plots

The comparison of an experimental result $\rho_{exp} = \{r_M^{(L)}\}$ (with statistical errors $\Delta r_M^{(L)}$) with a theoretical prediction $\rho_{th} = \{x_M^{(L)}\}$, is generally made by computing the χ^2 value (from eq. (16)) and the corresponding confidence level for N degrees of freedom.

We think that this is completely insufficient for polarization measurements. Indeed the χ^2 test studies *only* the compatibility between ρ_{exp} and ρ_{th}. In the usual procedure (eq. (16)), the confidence level improves when the errors increase. In the limit a measurement with infinite errors is perfectly compatible with any theoretical measurement. It is therefore necessary to know first the accuracy of the experiment; one *cannot forget* that the $r_M^{(L)}$'s are not free parameters, they are constrained to represent a point ρ_{exp} of the polarization domain $\mathcal{D}$. Hence if the size of the errors and the size of $\mathcal{D}$ are of the same order of magnitude (e.g. $\lambda > 0.2$), the comparison of ρ_{exp} with ρ_{th} is not very significant.

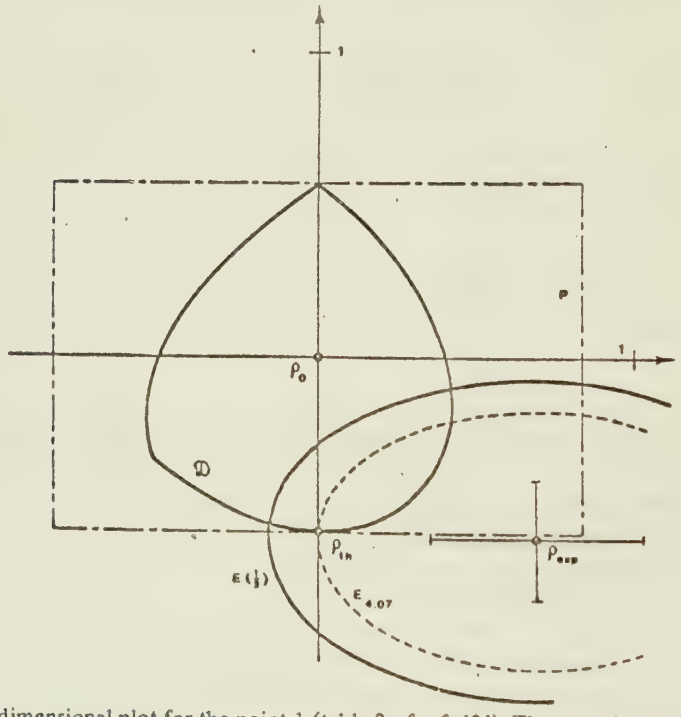

Fig. 1. Two-dimensional plot for the point 1 (table 2 of ref. [3]). The two-plane of the plot is defined by the 3 points ρ_0, ρ_{exp} and ρ_{th}. This figure shows the section by this plane of the physical bounds domain P, the polarization domain $\mathcal{D}$ and the two ellipsoids E(½) (whose points have a level of confidence ≥ ½) and $E_{4.07}$ (which passes through ρ_{th}, eq. (20)).

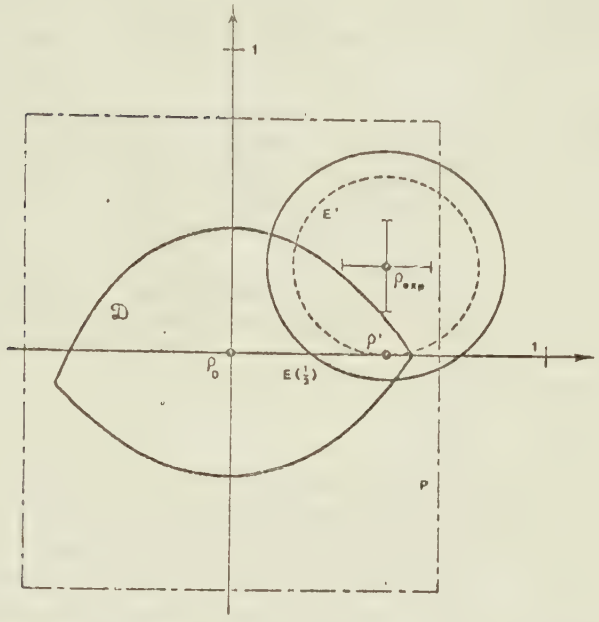

Fig. 2. Two-dimensional plot for the point 2 (table 3 of ref. [3]). The two-plane of the plot is defined by three points ρ_0, ρ_{exp} and ρ' which is the closest to ρ_{exp} of the set of points predicted by the quark model eq. (21). This figure shows the section by this plane of the physical bounds domain P, the polarization domain $\mathcal{D}$ and the two ellipsoids $E(\frac{1}{2})$ (whose points have a level of confidence $\geqslant \frac{1}{2}$) and E' (which passes through ρ').

The authors of ref. [1] have emphasized the necessity to know the polarization domain $\mathcal{D}$ for each experiment and they have proposed a procedure for plotting on it the experimental points with their errors. To visualize easily the position of ρ_{exp} and ρ_{th} with respect to $\mathcal{D}$ when the dimension N of the polarization space is large, we propose here a procedure using a two-dimensional plot. We draw the intersections of $\mathcal{D}$ and $E(\frac{1}{2})$ with the two-dimensional plane defined by the three points ρ_0, ρ_{exp} and ρ_{th} †. For spin $\frac{3}{2}$, the intersections of this two-plane with the quadrics C_+ and C_- (eq. (5)) which bound $\mathcal{D}$ are conics, and the intersection with $E(\frac{1}{2})$ is an ellipse.

For reactions (1), because of angular momentum conservation one has rank $\rho = 2$, at any s and t (ref. [1]). Then the representative point is on the boundary $\partial\mathcal{D}$ of the polarization domain, at the intersection of the quadrics C_+ and C_-, eq. (5). More precisely, for these reactions, several simple models (e.g. 1^- meson exchange with magnetic coupling [7], $SU(6)_W$ invariance [8], quark model [9]) predict, for any s and t

$$\rho_{th} : x_0^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{all other } x_M^{(L)} = 0. \tag{20}$$

† Of course the two-dimensional plot, which is a section in the N-dimensional polarization space, does not contain a complete information on the N measured parameters.

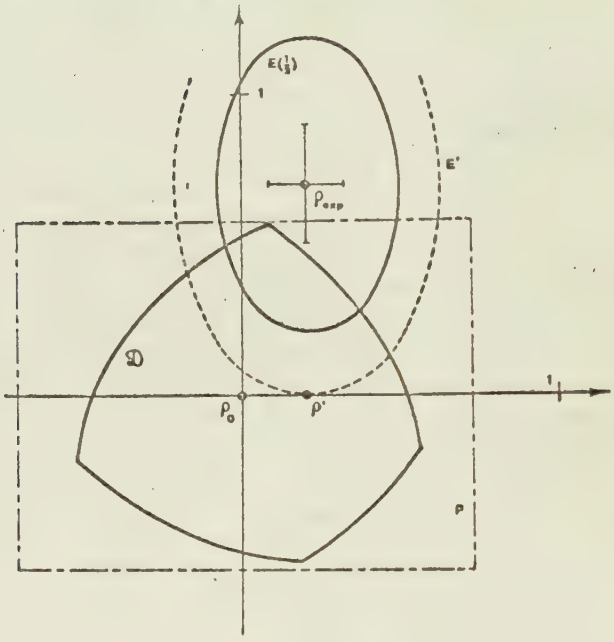

Fig. 3. Two-dimensional plot for the point 3 (table 4 of ref. [3]). See caption of fig. 2.

In AW there is one experimental point (point 1) for the two quasi-two-body reactions (1). They find this point compatible with ρ_{th} of eq. (17); the χ^2 is 4.07 and the corresponding confidence level, for 7 degrees of freedom, is 77%. Fig. 1 shows the two-dimensional plot for this point. The experimental point is outside the polarization domain $\mathcal{D}$ but the statistical errors are so large † (the corresponding $\lambda = 7.41$) that the point ρ_{exp} is compatible with most points of $\mathcal{D}$. This situation shows, as we noticed, that a good χ^2 value is not a sufficient criterium for testing a theory.

For reactions (2), the prediction of the quark model [10] is

$$\rho_{th} : r_M^{(3)} = 0, \qquad \text{no conditions for } r_M^{(L)}, \qquad L = 1, 2. \tag{21}$$

Conditions (21) do not define a single theoretical point, they define a four-plane in the seven-dimensional polarization space. We denote by ρ' the orthogonal projection of ρ_{exp} on this four-plane, and the two-dimensional plot for this case is the section of $\mathcal{D}$ and $E(\frac{1}{2})$ by the two-plane defined by $\rho_0, \rho_{exp}, \rho'$. In AW there is one experimental point (points 2 and 3) for each inclusive reaction (2). They give the value of χ^2 for point 2, the corresponding confidence level (3 degrees of freedom) is 28%. For point 3

† Whatever the statistical errors we notice that the median value $r_0^{(2)} = -(2/\sqrt{3})\,0.52$ corresponds to an angular distribution of the decay $Y^* \to \Lambda\pi$ which is not positive definite. See ref. [1b], subsect. 3.2.3 and fig. 6.

the level of confidence would be less than 0.5%. Figs. 2 and 3 show the two-dimensional plots for points 2 and 3. These experimental results are based on a number of events 10 times bigger than that of point 1 and the size of errors is definitely smaller than the size of $\mathcal{D}$.

Although the experimental points are both outside the polarization domain, they are very close to it. This suggests that the true polarization is close to the boundary of $\mathcal{D}$ and not very sensitive to $p_{\parallel}$ and $p_{\perp}$ and to the variables which are summed over in the inclusive reaction. Indeed in a convex domain if the barycenter of a set of points is close to a curved boundary, most of the points of the set should be near the barycenter.

Furthermore, we remark that the experimental points, specially point 3, are in disagreement with the quark-model prediction.

6. Conclusion

The representative point of a positive density matrix belongs to a domain $\mathcal{D}$ in the N-dimensional polarization space. In this paper, we have emphasized that *any analysis of polarization measurement must be done in terms of the polarization domain* which is smaller than the domain of the physical bounds. This can be done graphically as proposed in ref. [1]. Here for experimental results given with statistical errors we have defined two parameters λ and μ which estimate the precision of the measure and its compatibility with the positivity condition. Moreover we have shown that the χ^2 test alone is not meaningful for the comparison of an experimental result with a theoretical prediction when the errors are too big. To visualize directly this comparison we have proposed a two-dimensional plot which shows the position of the theoretical and experimental points with respect to $\mathcal{D}$.

To illustrate our discussion we have studied the interesting experimental results of AW (ref. [3]), on the complete density matrix of the $Y^*(1385)$ produced in quasi-two-body and in inclusive reactions. For the case of quasi-two-body reactions we hope to have soon results with better statistics, because of course, it is hopeless to measure precisely 7 parameters from 37 events.

The authors are grateful to Professor J. Donohue for reading the manuscript.

They also thank Hewlett-Packard France for their help with the desk calculator and plotter used for the figures.

References

[1a] M.G. Doncel, L. Michel and P. Minnaert, Matrices densité de polarisation, Lectures at the Summer School of Gif-sur-Yvette, 1970, ed. R. Salmeron, Laboratoire de Physique, Ecole Polytechnique, Paris.

[1b] Nucl. Phys. B38 (1972) 477.

[2] P. Minnaert, The polarization domain, in Particle physics, Les Houches, 1971, ed. C. De Witt and C. Itzykson (Gordon and Breach, New York).

[3] Aachen–Berlin–CERN–Cracow–London–Vienna–Warsaw-Collaboration, J.V. Beaupré et al., Nucl. Phys. B49 (1972) 405.
[4] N. Byers and S. Fenster, Phys. Rev. Letters 11 (1963) 52.
[5] E. De Rafael, Ann. Inst. H. Poincaré 5 (1966) 83.
[6] A. Kotanski, B. Sredniawa and K. Zalewski, Acta Phys. Pol. B2 (1971) 789.
[7] L. Stodolski and J.J. Sakurai, Phys. Rev. Letters 11 (1963) 90.
[8] M.G. Doncel, Nuovo Cimento 52A (1967) 617.
[9] H. Lipkin, Nucl. Phys. B1 (1967) 597.
[10] P. Gizbert-Studnicki and A. Golemo, Nuovo Cimento Letters 4 (1970) 473.

20 - TESTS DE SPIN RIGOUREUX DANS LES DESINTEGRATIONS FORTES A DEUX AMPLITUDES

Dans un article récent, Doncel, Michel et Minnaert obtiennent des tests de spin rigoureux dans les désintégrations par interactions fortes faisant intervenir une seule amplitude

$$ {}^{j}\eta \longrightarrow 0^{-}\ 0^{-} \quad , \quad \eta = (-1)^{j} $$

$$ {}^{j}\eta \longrightarrow 1^{-}\ 0^{-} \quad , \quad \eta = (-1)^{j} $$

$$ {}^{j}\eta \longrightarrow \tfrac{1}{2}\eta_1\ 0^{\eta_2} \quad , \quad \forall\ \eta, \eta_1, \eta_2 \ . $$

Avec G. Massas et P. Minnaert nous étendons ces tests aux désintégrations fortes, à deux amplitudes, suivantes

$$ {}^{j}\eta \longrightarrow 1^{\eta_1}\ 0^{\eta_2} \quad , \quad \eta\eta_1\eta_2 = (-1)^{j+1} \quad , $$

$$ {}^{j}\eta \longrightarrow 2^{\eta_1}\ 0^{\eta_2} \quad , \quad \eta\eta_1\eta_2 = (-1)^{j+1} \quad , $$

$$ {}^{j}\eta \longrightarrow 3/2^{\eta_1}\ 0^{\eta_2} \quad , \quad \forall\ \eta, \eta_1, \eta_2 \ . $$

Le principe de ces tests est basé sur la positivité de l'opérateur densité de polarisation ρ de la particule qui se désintègre. Cette propriété impose à ρ d'appartenir au domaine de polarisation $\mathcal{D}_j$. Dans la désintégration, ce domaine $\mathcal{D}_j$ est transformé en un domaine $\mathcal{D}'_j$ de l'espace des distributions angulaires. Si la mesure d'une distribution angulaire de désintégration n'appartient pas au domaine $\mathcal{D}'_j$, l'hypothèse d'un spin j pour la particule qui se désintègre doit être rejetée.

Pour les désintégrations à une amplitude, la distribution angulaire est indépendante de la dynamique et les domaines $\mathcal{D}'_j$ sont donnés dans l'article initial. Pour les désintégrations à deux amplitudes, la distribution angulaire, et donc le domaine $\mathcal{D}'_j$ dépendent de la dynamique, mais l'union des domaines $\mathcal{D}'_j$ pour toutes les situations dynamiques possibles donne un domaine $\mathcal{D}''_j$ qui permet des tests de spin.

Nuclear Physics B00 (1974) 000–000. North-Holland Publishing Company

RIGOROUS SPIN TESTS FROM TWO-AMPLITUDE STRONG DECAYS

M. DAUMENS, G. MASSAS† and P. MINNAERT
Laboratoire de Physique Théorique, Bordeaux*

Received 25 March 1974

Abstract: We extend to two-amplitude strong decays ($j \to 1\ 0, j \to 2\ 0, j \to \frac{3}{2}\ 0$) the rigorous spin tests given by Doncel, Michel and Minnaert for the usual one-amplitude strong decays.

1. Introduction

In a recent paper [1] Doncel et al. obtained rigorous spin tests from the usual strong decays

$$j^{\eta} \to 0^{-}\ 0^{-}\ , \qquad \eta = (-1)^{j}\ , \tag{1a}$$

$$j^{\eta} \to 1^{-}\ 0^{-}\ , \qquad \eta = (-1)^{j}\ , \tag{1b}$$

$$j\ \to \tfrac{1}{2}\ 0\ , \qquad \text{with any parity}\ , \tag{1c}$$

which involve only one amplitude. We extend the tests to the following two-amplitude strong decays:

$$j^{\eta} \to 1^{\eta_1}\ 0^{\eta_2}\ , \qquad \eta\,\eta_1\,\eta_2 = (-1)^{j+1}\ , \tag{2a}$$

$$j^{\eta} \to 2^{\eta_1}\ 0^{\eta_2}\ , \qquad \eta\,\eta_1\,\eta_2 = (-1)^{j+1}\ , \tag{2b}$$

$$j\ \to \tfrac{3}{2}\ 0\ , \qquad \text{with any parity}\ . \tag{2c}$$

The principle of the tests is based on the positivity of the polarization operator $\rho(j)$ of the spin j decaying particles. This property implies that $\rho(j)$ belongs to a convex domain $\mathcal{D}_j$ called the polarization domain [2]. The decay is a mapping from the polarization space to the angular distribution one. By this mapping the domain $\mathcal{D}_j$ is transformed into a domain $\mathcal{D}'_j$. The measurement of the decay angular distribution yields a point in the angular distribution space; the spin assignment j for the decaying particles must be rejected if this point does not belong to $\mathcal{D}'_j$. For one-

† Present address: CERN, Geneva, Switzerland.
* Equipe de Recherche associée au C.N.R.S. Postal address: Laboratoire de Physique Théorique, Université de Bordeaux I, Chemin du Solarium, 33170 Gradignan, France.

amplitude decays the mapping is independent od the dynamics and is explicitly given in [1]. For teo amplitude decays the mapping depends on the dynamics, but the union of the domains $\mathcal{D}'_j$ for all possible dynamical situations given a domain $\mathcal{D}''_j$ which allows spin tests.

Let us recall the main features of the mapping, cf. [1]. The polarization and the angular distribution spaces are direct sums of subspaces $\epsilon(L)$ and $\epsilon'(L)$ invariant under the action of the rotation group. The intersections by, and the projections on these invariant subspaces, of $\mathcal{D}_j$ and $\mathcal{D}'_j$ are denoted by $\mathcal{D}_j(L)$, $\tilde{\mathcal{D}}_j(L)$ and $\mathcal{D}'_j(L)$, $\tilde{\mathcal{D}}'_j(L)$, respectively. The mapping of the decay relates the domain $\mathcal{D}_j(L)$ to $\mathcal{D}'_j(L)$ (and $\tilde{\mathcal{D}}_j(L)$ to $\tilde{\mathcal{D}}'_j(L)$) by a dilation with coefficient $C(L)$, called decay coefficient,

$$\mathcal{D}'_j(L) = C(L)\,\mathcal{D}_j(L)\,,\quad \tilde{\mathcal{D}}'_j(L) = C(L)\,\tilde{\mathcal{D}}_j(L)\,, \tag{3}$$

Spin tests can be performed in each subspace $\epsilon'(L)$. In the general case the projection of the experimental point on $\epsilon'(L)$ must belong to the projection $\tilde{\mathcal{D}}'_j(L)$. In some particular cases, one knows that the experimental point lies in the subspace $\epsilon'(L)$, then it must fall inside the intersection $\mathcal{D}'_j(L)$.

In sect. 2 we study the one and two amplitude decay coefficients. In sect. 3 we derive the domain $\mathcal{D}''_j(L)$ and $\tilde{\mathcal{D}}''_j(L)$ for the decays (2) as functions of the domains $\mathcal{D}'_j(L)$ and $\tilde{\mathcal{D}}'_j(L)$ for the decays (1). In sect. 4 we apply the results to the case of quadrupole polarization ($L = 2$).

2. The decay coefficients

If we choose as bases for $\epsilon(L)$ and $\epsilon'(L)$ the operators $T^{(L)}_M$ and the functions $Y^{(L)}_M(\theta, \varphi)$, the expansions of the density operator $\rho(j)$ and of the angular distribution $J(\theta, \varphi)$ read, cf. [3],

$$\rho(j) = \sum_{L=0}^{2j} \frac{2L+1}{2j+1} \sum_{M=-L}^{+L} \overline{t^{(L)}_M}\, T^{(L)}_M\,, \tag{4}$$

$$J(\theta, \varphi) = \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} \langle Y^{(L)}_M \rangle\, Y^{(L)}_M(\theta, \varphi)\,. \tag{5}$$

For the decay $j \to j_1 + 0$ ($j_1 \leqslant j$) the moments $\langle Y^{(L)}_M \rangle$ of the angular distribution and the multipole parameters $t^{(L)}_M$ of the decaying particles are related by the decay coefficients $C(L)$

$$\langle Y^{(L)}_M \rangle = C(L)\, t^{(L)}_M\,. \tag{6}$$

These coefficients, written as functions of the normalized helicity amplitudes $A(m_1)$ ($\Sigma^{+j_1}_{m_1=-j_1} |A(m_1)|^2 = 1$), are [3]

$$\sqrt{4\pi}\,C(L) = \sqrt{(2J+1)(2L+1)} \sum_{m_1=-J_1}^{+J_1} \begin{pmatrix} m_1 & L & J \\ J & 0 & m_1 \end{pmatrix} |A(m_1)|^2 . \tag{7}$$

Parity conservation implies that $|A(m_1)|^2 = |A(-m_1)|^2$. Hence the summation in eq. (7) can be performed on the non-negative values of m_1 and yields vanishing coefficients $C(L)$ for L odd.

We now consider the one and two amplitude decays (1a, 1b, 1c) and (2a, 2b, 2c). Their decay coefficients are denoted by $C_n(L, J_1)$ where $n = 1; 2$ is the number of amplitudes. The coefficients $C_1(L, J_1)$ are independent of the dynamics while the coefficients $C_2(L, J_1)$ depend on one dynamical parameter, $\gamma\,(-1 \leqslant \gamma \leqslant +1)$, defined by

$$\gamma = 2[(\tfrac{1}{2})^{\delta_{J_1 1}} |A(J_1 - 1)|^2 - |A(J_1)|^2] . \tag{8}$$

It is interesting to note that $C_2(L, J_1)$ can be related to $C_1(L, J_1 - 1)$ by

$$C_2(L, J_1) = C_1(L, J_1 - 1)\, D(L, J_1, \gamma) , \tag{9}$$

where $D(L, J_1, \gamma)$ depends linearly on γ

$$D(L, J_1, \gamma) = \tfrac{1}{2}\,[1 + \mu(L, J_1)] + \tfrac{1}{2}\,[1 - \mu(L, J_1)]\,\gamma , \tag{10}$$

with

$$\mu(L, J_1) = \begin{pmatrix} +J_1 & L & J \\ J & 0 & +J_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +J_1 - 1 & L & J \\ J & 0 & +J_1 - 1 \end{pmatrix}^{-1} . \tag{11}$$

All the dynamical dependence of $C_2(L, J_1)$ is now contained in $D(L, J_1, \gamma)$, so the extrema of $C_2(L, J_1)$ are deduced from those of $D(L, J_1, \gamma)$, which are reached for $\gamma = \pm 1$,

$$D(L, J_1, \gamma = +1) = 1, \; D(L, J_1, \gamma = -1) = \mu(L, J_1) . \tag{12}$$

3. The domains $\mathcal{D}''_J(L)$ for two amplitude decays

Throughout this section and the following we only consider the intersections $\mathcal{D}_J(L)$, $\mathcal{D}'_J(L)$, $\mathcal{D}''_J(L)$ of the domains. All the statements are also valid for their projections $\tilde{\mathcal{D}}_J(L)$, $\tilde{\mathcal{D}}'_J(L)$, $\tilde{\mathcal{D}}''_J(L)$.

We denote by $\mathcal{D}'_J(L, \gamma)$ the intersection of the dynamics dependent domain for two amplitude decays. The factorization (9) of the decay coefficients can be visualized in the diagram

$$\mathcal{D}_J(L) \xrightarrow{C_1(LJ_1 - 1)} \mathcal{D}'_J(L) \xrightarrow{D(LJ_1, \gamma)} \mathcal{D}'_J(L, \gamma) , \tag{13}$$

i.e., the domain $\mathcal{D}'_j(L,\gamma)$ is deduced from the corresponding one-amplitude decay domain $\mathcal{D}'_j(L)$ by the dilation with coefficient $D(L,j_1,\gamma)$. The union of all domains $\mathcal{D}'_j(L,\gamma)$, when the dynamical parameter γ varies from -1 to $+1$, is the union of the domains obtained for the extrema of the dilation coefficient, namely, cf. eq. (12),

$$\mathcal{D}''_j(L) = \mathcal{D}'_j(L,\gamma=+1) \cup \mathcal{D}'_j(L,\gamma=-1) = \mathcal{D}'_j(L) \cup [\mu(L,j_1)\,\mathcal{D}'_j(L)]\,. \qquad (14)$$

Hence the domains $\mathcal{D}''_j(L)$ which allow spin tests from two amplitude decays are readily deduced from the corresponding one amplitude domains $\mathcal{D}'_j(L)$.

Although the domains $\mathcal{D}'_j(L,\gamma=\pm1)$ are convex, their union is convex only if one of the domains contains the other. This is the case in either of the following situations

(i) $\mu(L,j_1) \geqslant 0$,

(ii) $\mathcal{D}_j(L)$ has a symmetry center.

Then $\mathcal{D}''_j(L)$ is given by

$$\mathcal{D}''_j(L) = \begin{cases} \mathcal{D}'_j(L) & \text{if } |\mu(L,j_1)| \leqslant 1\,, \\ \mu(L,j_1)\,\mathcal{D}'_j(L) & \text{if } |\mu(L,j_1)| > 1\,. \end{cases} \qquad (15)$$

4. Applications to quadrupole polarization

For parity conserving decays the dipole polarization ($L = 1$) does not allow spin tests since the decay coefficients $C(1)$ vanish. In the following we restrict ourselves to quadrupole polarization ($L = 2$). We give the relations between the domains $\mathcal{D}''_j(2)$ for the reactions (2a, 2b, 2c) and the domain $\mathcal{D}'_j(2)$ for the reactions (1a, 1b, 1c). The latter have been computed and their meridian sections drawn in ref. [1].

(i) *Decay (2a).* The analytic expressions of the $3j$-symbols in eq. (11), [4], give

$$\mu = 1 - 3/j\,(j+1). \qquad (16)$$

For $j = 1$, $\mu = -\frac{1}{2}$. The meridian section of $\mathcal{D}'_1(2)$ is an equilateral triangle, hence $\mu\,\mathcal{D}'_1(2)$ is contained in $\mathcal{D}'_1(2)$ and $\mathcal{D}''_1(2)$ is equal to $\mathcal{D}'_1(2)$.

For $j \geqslant 2$, $0 < \mu < 1$. From eq. (15) one also gets $\mathcal{D}''_j(2) = \mathcal{D}'_j(2)$.

(ii) *Decay (2b).* In this case one has

$$\mu = 1 - 9/[j\,(j+1) - 3]\,. \qquad (17)$$

For $j = 2$, $\mu = -2$. The meridian section of $\mathcal{D}'_2(2)$ being a circle, $\mathcal{D}''_2(2)$ is a circle with twice the radius, cf. eq. (15). For $j \geqslant 3$, $0 \leqslant \mu < 1$. Eq. (15) implies $\mathcal{D}''_j(2) = \mathcal{D}'_j(2)$.

(iii) *Decay (2c).* Eq. (11) gives

$$\mu = 1 - 6/(j+\tfrac{3}{2})\,(j-\tfrac{1}{2})\,. \qquad (18)$$

For $j = \frac{1}{2}$, $\mu = -1$. The meridian section of $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(2)$ is a circle, thus $\mathcal{D}''_{\frac{1}{2}}(2) = \mathcal{D}'_{\frac{1}{2}}(2)$. For $j \geqslant \frac{5}{2}$, $0 < \mu < 1$. Eq. (15) implies $\mathcal{D}''_j(2) = \mathcal{D}'_j(2)$.

5. Conclusion

The result of this study is that for each decay but one ($2 \to 2\,0$) the quadrupole domains $\mathcal{D}''_j(2)$ which allow spin tests from two amplitude decays are identical to the domains $\mathcal{D}'_j(2)$ for one amplitude decays. Hence the plots (projections and intersections) which are given in figs. 3–5 of ref. [1] for the decays (1a, 1b, 1c) can be used for the decays (2a, 2b, 2c). The only difference is that the circles $j = 2$ of fig. 4 must be replaced by circles with the radius doubled.

Generally the final particles of the decays (2) are unstable, i.e., one has sequential decays. For instance, the decay (2a) $j \to 1\,0$ is followed by the decay $1 \to 0\,0$. Then the angular distribution of the sequential decays allows further spin tests which will be studied in a forthcoming publication.

The author acknowledge Professors M. Doncel and L. Michel for several fruitful discussions and the Institut des Hautes Etudes Scientifiques for its hospitality.

References

[1] M.G. Doncel, L. Michel and P. Minnaer, Nucl. Phys. B38 (1972) 477.
[2] P. Minnaert, The polarization domain, Particle physics, Les Houches 1971, ed. C. de Witt and C. Itzykson, (Gordon and Breach, New York, 1972).
[3] M.G. Doncel, L. Michel and P. Minnaert, Matrices densité de polarisation, Lectures at the Summer School of Gif-sur-Yvette, 1970, ed. R. Salmeron (Laboratoire de Physique, Ecole Polytechnique, Paris).
[4] A.R. Edmonds, Angular momentum in quantum mechanics, table 2, p. 125, (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957).

Pour illustrer notre étude nous considérons le quadrupole (L = 2) B-symétrique, en transversité, décrit par les trois paramètres r_o^2 , r_{-2}^2, r_{+2}^2 . Les domaines $\mathcal{D}_j(2)$ et $\tilde{\mathcal{D}}_j(2)$ ont une symétrie de révolution autour de l'axe des r_o^2 . Les figures 1 et 2 représentent les intersections de ces domaines par un plan méridien i.e. passant par l'axe des r_o^2, paramétré par les variables η et ξ définies par

$$\eta = r_o^2 \quad , \qquad \xi = \sqrt{(r_2^2)^2 + (r_{-2}^2)^2} \quad . \tag{19}$$

Les domaines $\mathcal{D}'_j(2)$ et $\tilde{\mathcal{D}}'_j(2)$ pour une amplitude, et $\mathcal{D}''_j(2)$ et $\tilde{\mathcal{D}}''_j(2)$ pour deux amplitudes, se déduisent de $\mathcal{D}_j(2)$ et $\tilde{\mathcal{D}}_j(2)$ par une homothétie de rapport λ défini par

$$\lambda = C_1(2, j_1 - 1) \qquad \text{pour 1 amplitude} \tag{20a}$$

$$\lambda = C_2(2, j_1) \qquad \text{pour 2 amplitudes} \quad . \tag{20b}$$

Comme nous l'avons remarqué, les deux expressions précédentes de λ diffèrent seulement dans le cas $j = j_1 = 2$, et il en est donc de même des domaines $\mathcal{D}'_j(2)$, $\mathcal{D}''_j(2)$ d'une part et $\tilde{\mathcal{D}}'_j(2)$, $\tilde{\mathcal{D}}''_j(2)$ d'autre part. Ces domaines présentent la même symétrie de révolution que $\mathcal{D}_j(2)$ et $\tilde{\mathcal{D}}_j(2)$, et leurs sections méridiennes sont représentées sur les figures 3,4 et 5 selon la valeur de j_1.

N.B. A l'exception des cercles 2' rajoutés sur la figure 4, les figures sont extraites de l'article initial de Doncel, Michel, Minnaert qui donne une définition plus générale des paramètres η et ξ .

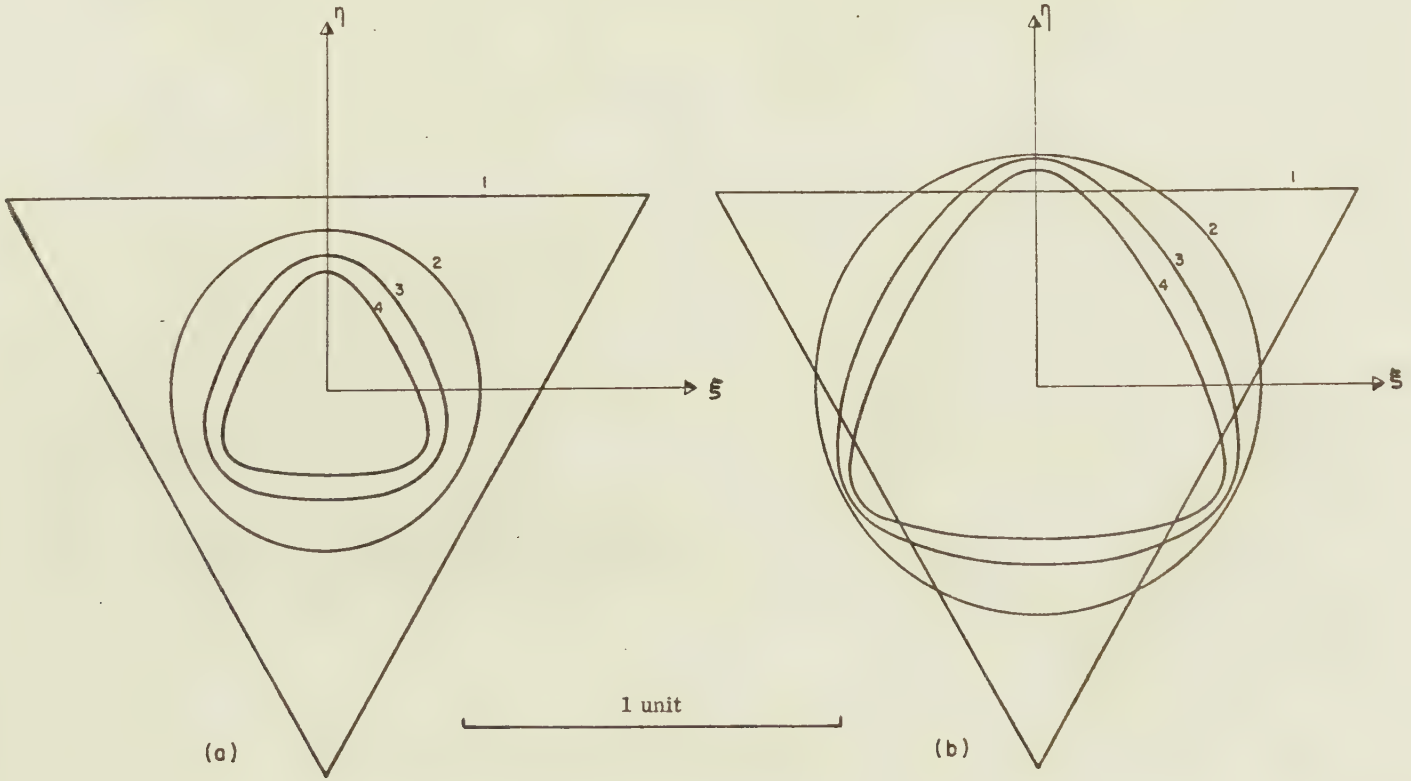

Fig.1. Sections méridiennes des domaines $\mathcal{D}_j(2)$, (a), et $\mathfrak{D}_j(2)$, (b) **pour les bosons.**

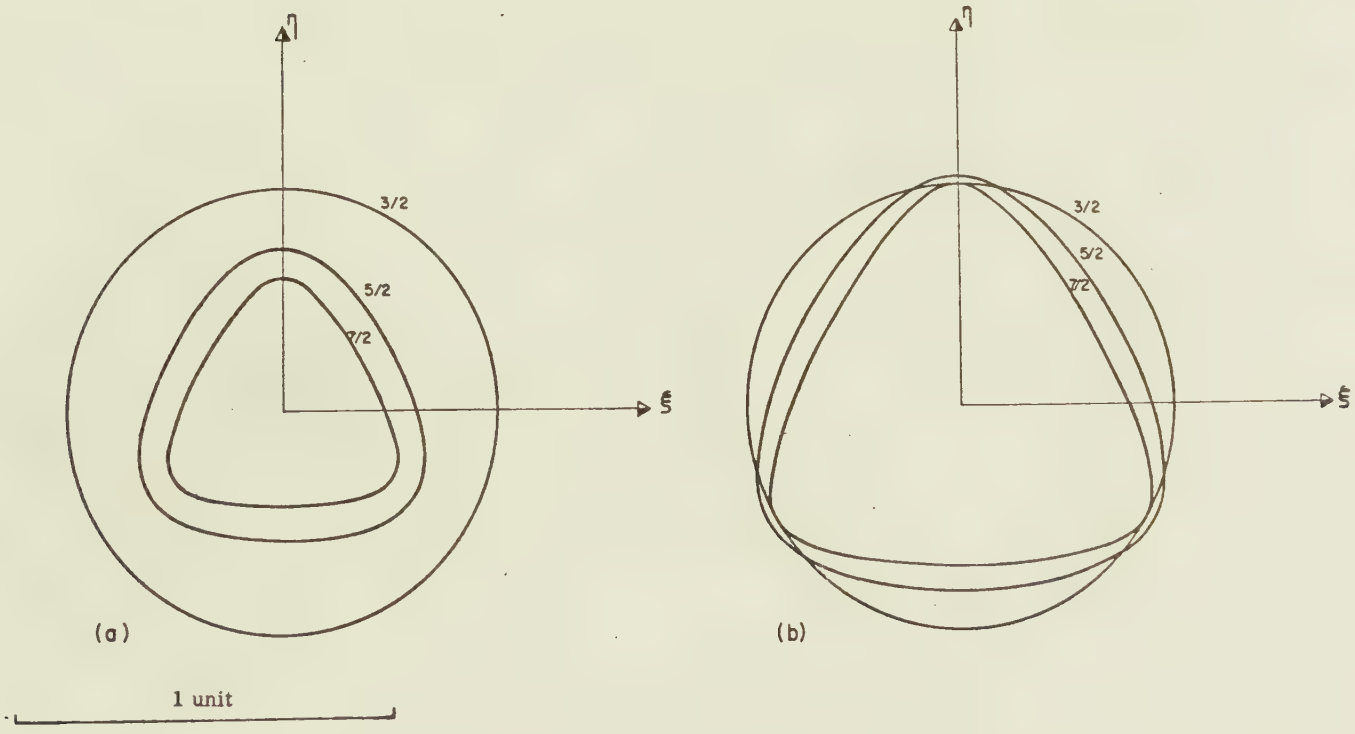

Fig.2. Sections méridiennes des domaines $\mathcal{D}_j(2)$, (a) et $\tilde{\mathcal{D}}_j(2)$, (b) pour les fermions.

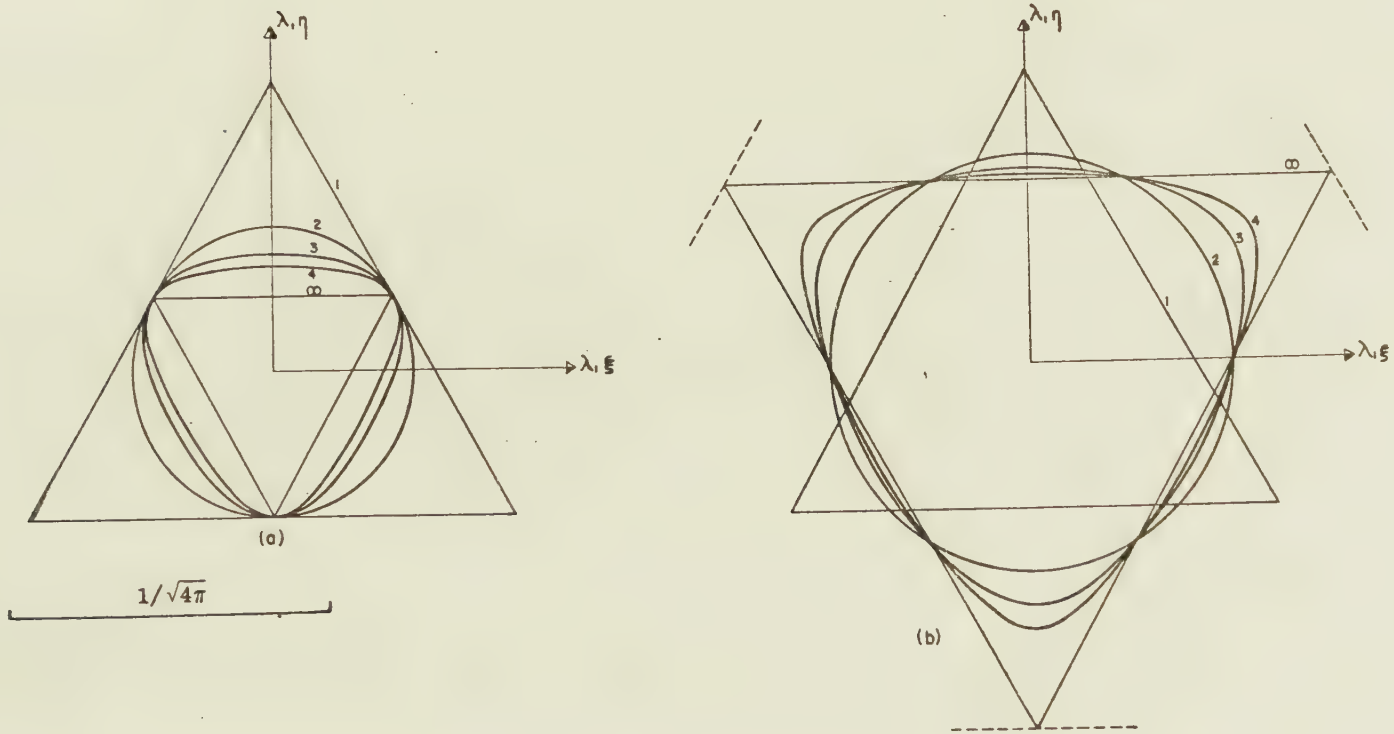

Fig.3. Sections méridiennes des domaines $\mathcal{D}'_j(2) \equiv \mathcal{D}''_j(2)$, (a) et $\tilde{\mathcal{D}}'_j(2) \equiv \tilde{\mathcal{D}}''_j(2)$, (b) pour des désintégrations j → 0 0 (1 amplitude) j → 1 0 (2 amplitudes).

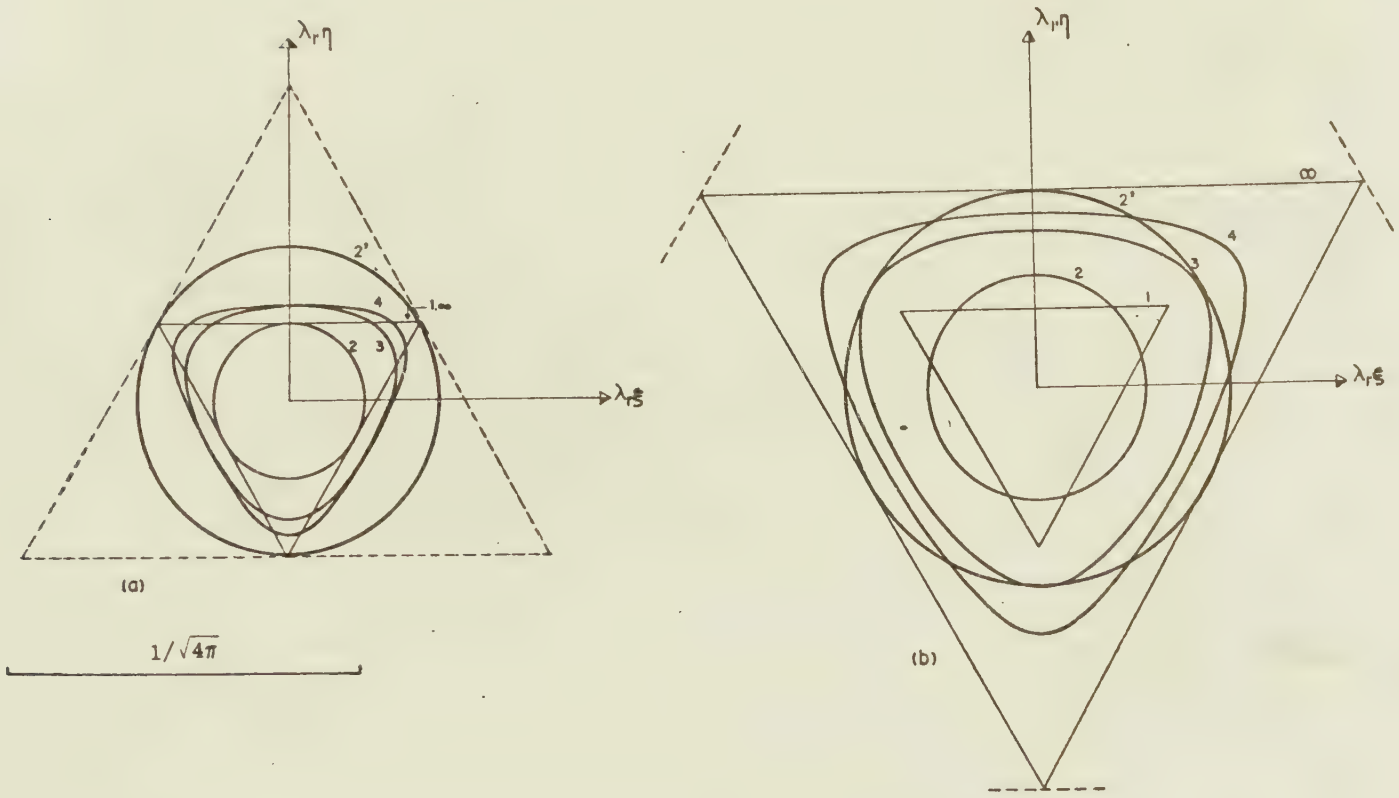

Fig.4. Sections méridiennes des domaines : $\mathcal{D}'_j(2) \equiv \mathcal{D}''_j(2)$, (a) et $\tilde{\mathcal{D}}'_j(2) \equiv \tilde{\mathcal{D}}''_j(2)$, (b) pour $j > 2$; $\mathcal{D}'_2(2)$, $\mathcal{D}''_2(2)$, cercles 2 et 2' dans (a) ; $\tilde{\mathcal{D}}'_2(2)$, $\tilde{\mathcal{D}}''_2(2)$, cercles 2 et 2' dans (b), pour les désintégrations. $j \to 1$ 0 (1 amplitude) et $j \to 2$ 0 (2 amplitudes).

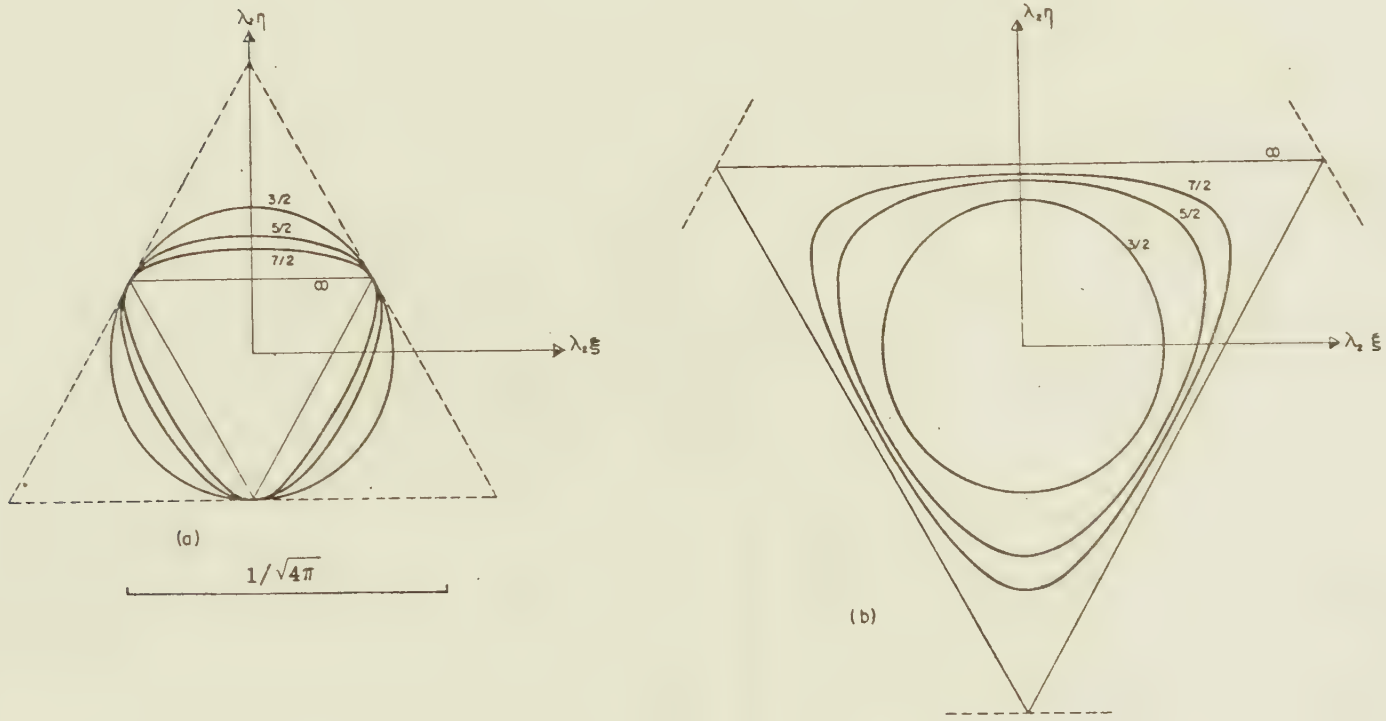

Fig.5. Sections méridiennes des domaines $\mathcal{D}'_j(2) \equiv \mathcal{D}''_j(2)$, (a) et $\tilde{\mathcal{D}}'_j(2) \equiv \tilde{\mathcal{D}}''_j(2)$, (b) pour les désintégrations j → ½ 0 (1 amplitude) j → 3/2 0 (2 amplitudes).

CHAPITRE SEPTIEME

DESINTEGRATIONS EN SEQUENCE ET TESTS DE SPIN DANS LES REFERENTIELS CANONIQUES ET D'HELICITE

21 - DESINTEGRATIONS EN SEQUENCE ET TESTS DE SPIN DANS LES REFERENTIELS CANONIQUES ET D'HELICITE

Dans cet article écrit avec G. Massas et P. Minnaert, nous étudions les désintégrations en séquence, i.e. les processus du type

$$1 \longrightarrow 2 + 3 \quad , \quad 2 \longrightarrow 4 + 5 \quad , \quad 4 \longrightarrow 6 + 7 \quad , \ldots$$

De tels processus sont très fréquents en Physique des Particules. Les "Tables of Particle Properties" donnent de nombreuses séquences à deux, trois ou quatre désintégrations successives, telles que, à chaque désintégration, l'une des particules produites est toujours un méson π. C'est pourquoi, il est intéressant d'étudier systématiquement les séquences où les particules 3, 5, 7 sont sans spin et où les particules 2, 4, 6,... sont des fermions si la particule 1 est un fermion ou des bosons si la particule 1 est un boson. En outre nous nous limitons aux désintégrations usuelles faisant intervenir au plus deux amplitudes indépendantes.

L'analyse des séquences de désintégrations conduit à exprimer la distribution angulaire séquentielle, en fonction des spins des particules, de la polarisation de la première particule qui se désintègre et de la dynamique des désintégrations à deux amplitudes. Alors, les problèmes physiques consistent à tirer de cette expression

1°) le spin de la première particule en supposant connus les spins des autres particules

2°) la dynamique des désintégrations à deux amplitudes

3°) la polarisation de la première particule

Chacun de ces problèmes a déjà été étudié par différents auteurs, cependant chaque auteur travaille dans un référentiel donné (référentiels canoniques ou d'hélicité) et avec un ensemble donné d'amplitudes (amplitudes du couplage ℓ-s ou du couplage d'hélicité), de sorte que la

comparaison entre les résultats de divers auteurs est souvent difficile. Le but de cet article est d'établir les liens entre les diverses conventions de manière à faciliter les comparaisons. Nous donnons l'expression de la distribution angulaire séquentielle pour différents choix de référentiels et d'amplitudes de désintégration et pour chaque choix nous déduisons des tests de spin pour la particule 1. En particulier, nous montrons que les tests de spin proposés par Ademollo-Gatto-Preparata pour les référentiels canoniques et par Berman-Jacob et Chung pour les référentiels d'hélicité sont identiques. Nous obtenons aussi les paramètres dynamiques des désintégrations à deux amplitudes et la polarisation de la première particule.

SEQUENTIAL DECAYS AND SPIN TESTS IN CANONICAL AND HELICITY FRAMES

M. DAUMENS, G. MASSAS * and P. MINNAERT
Laboratoire de Physique Théorique +, Bordeaux

Abstract : We present the general formalism of sequential decays of the type $1 \to 2 + 3$, $2 \to 4 + 5$ for spinless particles 3 and 5. We compute the sequential decay angular distribution with respect to canonical or helicity frame for particle 2. We give the analytic expression of the decay coefficients for arbitrary j_1 and derive spin tests in canonical and helicity frames. We show that the spin tests proposed by Ademollo, Gatto and Preparata (for canonical frames) and by Berman, Jacob and Chung (for helicity frames) are equivalent.

PTB - 60

* Present address : CERN, Geneva, Switzerland.

+ Equipe de Recherche associée au C.N.R.S.

Postal address : Laboratoire de Physique Théorique
Université de Bordeaux I
Chemin du Solarium
33170 GRADIGNAN (FRANCE)

1 - INTRODUCTION

We call a sequential decay a process of the type

$$1 \to 2 + 3 \ , \ 2 \to 4 + 5 \ , \ 4 \to 6 + 7, \ \ldots\ldots \qquad (1)$$

Such processes are very frequent in particle physics. The Tables of Parti cle Properties give numerous examples of two-, three- and four-step sequential decays, for instance

$$K_N(1420) \to K^* \pi \ , \ K^* \to K \pi \ ,$$

$$Y^*(1385) \to \Lambda \pi \ , \ \Lambda \to p \pi \ ,$$

$$g \to A_2 \pi \ , \ A_2 \to \rho \pi \ , \ \rho \to \pi \pi \ ,$$

$$\Omega \to \Xi \pi \ , \ \Xi \to \Lambda \pi \ , \ \Lambda \to p \pi \ ,$$

$$\Xi^*(1940) \to \Xi^*(1530) \pi \ , \ \Xi^*(1530) \to \Xi \pi \ , \ \Xi \to \Lambda \pi \ , \ \Lambda \to p \pi \ .$$

The main feature of these examples is that at each step one of the decay products is a pion. Hence it seems of particular interest to study syste- matically sequential decays (1) where particles 3, 5, 7 ... are spinless bosons, particles 2, 4, 6... being fermions if particle 1 is a fermion, o bosons if particle 1 is a boson.

In this paper we restrict ourselves to sequential decays which involve at most two independent amplitudes at each step. This covers all usual decay For example let $j_i^{\epsilon_i}$ be the spin-parity of particle i (i = 1, 2, 3...), th one and two amplitude decays of the first step, with $j_1 \geqslant j_2 \geqslant j_3 = 0$, are :

(i) one amplitude decays

$$j_1^{\epsilon_1} \to 0^{\epsilon_2} + 0^{\epsilon_3} \quad \text{with} \quad \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = (-1)^{j_1} \ , \quad j_1 \geqslant 0 \ , \qquad (2a$$

$$j_1^{\epsilon_1} \to 1^{\epsilon_2} + 0^{\epsilon_3} \quad \text{with} \quad \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = (-1)^{j_1} \ , \quad j_1 \geqslant 1 \ , \qquad (2b$$

$$j_1^{\epsilon_1} \to \tfrac{1}{2}^{\epsilon_2} + 0^{\epsilon_3} \quad \text{with} \quad \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = (-1)^{j_1 \pm \frac{1}{2}} \ , \quad j_1 \geqslant \tfrac{1}{2} \ , \qquad (2c$$

(ii) two amplitude decays

$$j_1^{\epsilon_1} \to 1^{\epsilon_2} + 0^{\epsilon_3} \quad \text{with} \quad \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = (-1)^{j_1 + 1} \ , \quad j_1 \geqslant 1 \ , \qquad (3a$$

$$j_1^{\epsilon_1} \to 2^{\epsilon_2} + 0^{\epsilon_3} \quad \text{with} \quad \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = (-1)^{j_1 + 1} \ , \quad j_1 \geqslant 2 \ , \qquad (3b$$

$$j_1^{\epsilon_1} \to \tfrac{3}{2}^{\epsilon_2} + 0^{\epsilon_3} \quad \text{with} \quad \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = (-1)^{j_1 \pm \frac{1}{2}} \ , \quad j_1 \geqslant \tfrac{3}{2} \ , \qquad (3c$$

$$j_1 \to \tfrac{1}{2} + 0 \quad \text{with parity violation,} \quad j_1 \geqslant \tfrac{1}{2} \ . \qquad (3d$$

The main result of the analysis of process (1) is an expression fo the sequential decay angular distribution as function of the spins of particles 1, 2, 4, 6... , of the polarization of the decaying particle 1 and of the dynamics of the two amplitude decays. Then the physical

problems are to derive from this expression.

(i) the spin of the decaying particle 1, assuming that the spins of 2, 4, 6 ... are known,

(ii) the dynamical decay parameters of the two amplitude decays,

(iii) the polarization of the decaying particle.

Each of these problems has been already studied by different authors [1-12] in the recent literature. However each author works with given frames (canonical or helicity frames) and with a given set of amplitudes (amplitudes of the ℓs coupling or amplitudes of the helicity coupling) so that the comparison between the results of two different authors is often difficult.

This paper aims to bridge the gap between the different conventions and to make the comparisons more easy. It gives the sequential decay angular distribution of (1) for different choices of the reference frames and of the decay amplitudes. For each choice we derive spin tests for particle 1. In particular we show that the spin tests proposed by Ademollo, Gatto and Preparata [8] for canonical frames, and by Berman and Jacob [9,10] and by Chung [11] for helicity frames are identical. We also derive the dynamical decay parameters and the polarization of the decaying particle.

In Section 2 we define the canonical and helicity frames, the invariant canonical and helicity amplitudes and the corresponding dynamical decay parameters. Section 3 is the main section of the paper. It recalls the single decay angular distribution and it gives the helicity and canonical decay coefficients in terms of the invariant decay amplitudes. In Section 4 we derive the sequential decay angular distribution and show how to measure the polarization of the initial particle. Finally Section 5 describes the method to derive the dynamical decay parameters and the spin of particle 1 from the moments of the two-step sequential decay angular distribution.

The main text gives only general expressions of angular distributions and decay coefficients. All explicit results are gathered in Tables. Besides, in two appendices we recall some well known results on two particle states Appendix A, and on polarization density matrices Appendix B.

2 - FRAMES AND INVARIANT DECAY AMPLITUDES

This section is devoted to the definition of the canonical and helicity frames, the ℓs or helicity coupling amplitudes and the corresponding decay parameters for the two amplitudes decays.

2.1- Canonical and helicity frames for sequential decays

We denote by $j_i^{\epsilon_i}$ the spin-parity and by $\underline{p}_i$ the 4-momentum of particle i (i = 1,5) in the sequential decay (1). We assume that all particles have non vanishing mass, $m_i \neq 0$, and we define $\hat{p}_i = p_i/m_i$. To each particle 1 or 2, we associate a frame, i.e., a right handed set of three orthonormalized space-like 4-vectors $\underline{x}_i$, $\underline{y}_i$, $\underline{z}_i$, orthogonal to 4-momentum $\hat{\underline{p}}_i$. We call "tetrad associated to $\underline{p}_i$", and denoted it by $\{p_i\}$, a set of four-vectors $\{\hat{\underline{p}}_i, \underline{x}_i, \underline{y}_i, \underline{z}_i\}$, which satisfy

$$\hat{\underline{p}}_i^2 = -\underline{x}_i^2 = -\underline{y}_i^2 = -\underline{z}_i^2 = 1 \tag{4a}$$

$$\underline{x}_i \cdot \hat{\underline{p}}_i = \underline{y}_i \cdot \hat{\underline{p}}_i = \underline{z}_i \cdot \hat{\underline{p}}_i = \underline{x}_i \cdot \underline{y}_i = \underline{y}_i \cdot \underline{z}_i = \underline{z}_i \cdot \underline{x}_i = 0 \tag{4b}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, \hat{p}_i^{\mu}\, x_i^{\nu}\, y_i^{\rho}\, z_i^{\sigma} = 1 \tag{4c}$$

where $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ is the Levi-Civita tensor such that $\epsilon_{0123} = 1$.

2.1.1-Frames associated to the particle 1

There is always a reference frame $\{p_1\}$ associated to particle 1, defined by the production process of this particle. For instance, if 1 is the particle c or d produced in a quasi-two-body reaction of the type

$$a + b \rightarrow c + d \tag{5}$$

this reference frame may be a transversity or a helicity frame for this reaction. A precise definition of these frames has been given by Doncel, Michel and Minnaert in ref.[13].

In the study of the decay we need of an other frame associated to $\underline{p}_1$ and built from $\{p_1\}$ and $\underline{p}_2$. It is denoted by $\{p_1\}_h$, called helicity frame for the particle 1 in the decay, and defined by

$$\{p_1\}_h = \{\hat{\underline{p}}_1, \underline{x}_2, \underline{y}_2, \underline{h}_1\} \tag{6}$$

with

$$\underline{h}_1 = N\left[\hat{\underline{p}}_2 - (\hat{\underline{p}}_1 \cdot \hat{\underline{p}}_2)\, \hat{\underline{p}}_1\right] \quad , \quad N^{-2} = (\hat{\underline{p}}_1 \cdot \hat{\underline{p}}_2)^2 - 1 \ , \tag{7a}$$

$$y_2^{\mu} = C\, \epsilon^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}\, \hat{p}_1^{\nu}\, \hat{p}_2^{\rho}\, z_1^{\sigma} \quad , \quad C^{-2} = (\hat{\underline{p}}_1 \cdot \hat{\underline{p}}_2)^2 - (\underline{z}_1 \cdot \hat{\underline{p}}_2)^2 - 1 \ , \tag{7b}$$

$$x_2^{\mu} = -\epsilon^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}\, \hat{p}_1^{\nu}\, y_2^{\rho}\, h_1^{\sigma} \ . \tag{7c}$$

These two frames are related by a rotation of the little group of $\underline{p}$

$$\{p_1\}_h = R\,(p_2, \{p_1\})\, \{p_1\} \tag{8a}$$

defined by

$$R(p_2, \{p_1\}) = \hat{\underline{p}}_1 \otimes \hat{\underline{p}}_1 \cdot - \underline{x}_2 \otimes \underline{x}_1 \cdot - \underline{y}_2 \otimes \underline{y}_1 \cdot - \underline{h}_1 \otimes \underline{z}_1 \cdot \tag{8b}$$

In the rest frame of particle 1, the transformation $R(p_2, \{p_1\})$ reduces to the 3 × 3 rotation : $R(\varphi_2, \theta_2, 0) \equiv R(\Omega_2)$ where θ_2 and φ_2 are the polar and azimuthal angles of $\vec{p}_2$ in this frame. Then, the space-like 4-vectors of both tetrads become 3-vectors related by

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{p}_2}{|\vec{p}_2|} \quad , \quad \vec{y}_2 = \frac{\vec{z}_1 \wedge \vec{p}_2}{|\vec{z}_1 \wedge \vec{p}_2|} \quad , \quad \vec{x}_2 = \frac{(\vec{z}_1 \wedge \vec{p}_2) \wedge \vec{p}_2}{|\vec{z}_1 \wedge \vec{p}_2| \cdot |\vec{p}_2|} \tag{9}$$

2.1.2-Frames associated to the particle 2 and 4

The frames associated to particle 2 must be well defined with respect to the frames of particle 1. Two main choices are used and for both choices we need of the pure Lorentz transformation (boost) $L(p_2 \leftarrow p_1)$

$$L(p_2 \leftarrow p_1) = \mathbb{1} - \frac{(\hat{p}_2 + \hat{p}_1) \otimes (\hat{p}_2 + \hat{p}_1)}{1 + \hat{p}_2 \cdot \hat{p}_1} + 2\, \hat{p}_2 \otimes \hat{p}_1 . \tag{10}$$

which maps p_1 on p_2 and leaves invariant the 4-vectors orthogonal to p_1 and p_2. In the rest frame of particle 1, this is a pure Lorentz transformation in the direction of the 3-momentum $\vec{p}_2$.

(i) Canonical frame. The canonical frame $\{p_2\}_c$ for particle 2 is deduced from the reference frame $\{p_1\}$ by the previous pure Lorentz transformation, i.e.

$$\{p_2\}_c = L(p_2 \leftarrow p_1)\ \{p_1\} \tag{11}$$

This canonical frame is represented "conventionally" in Fig.1. The axes $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)_c$ in the rest system of particle 2 are drawn parallel to the axes $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ in the rest system of particle 1.

(ii) helicity frame. The helicity frame $\{p_2\}_h$ for particle 2 is deduced from the frame $\{p_1\}_h$ defined in (6) by the same pure Lorentz transformation, i.e. it is deduced from the reference tetrad by two successive transformations, $R(p_2, \{p_1\})$ and $L(p_2 \leftarrow p_1)$.

$$\{p_2\}_h = L(p_2 \leftarrow p_1)\ \{p_1\}_h = L(p_2 \leftarrow p_1)\ R(p_2, \{p_1\})\ \{p_1\} . \tag{12}$$

This product of Lorentz transformations reads

$$L(p_2 \leftarrow p_1)\ R(p_2, \{p_1\}) = \hat{p}_2 \otimes \hat{p}_1 - \underline{x}_2 \otimes \underline{x}_1 - \underline{y}_2 \otimes \underline{y}_1 - \underline{h}_2 \otimes \underline{z}_1 . \tag{13}$$

with

$$\underline{h}_2 = L(p_2 \leftarrow p_1)\ \underline{h}_1 = N\left[\underline{p}_1 - (\underline{p}_1\, \hat{p}_2)\hat{p}_2\right] \tag{14}$$

Then the four 4-vectors of this tetrad are,

$$\{p_2\}_h = \{\hat{p}_2, \underline{x}_2, \underline{y}_2, \underline{h}_2\} . \tag{15}$$

The helicity frame $\{p_2\}_h$ is represented "conventionally" in Fig.2. The axes $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{h}_2)_h$ in the rest system of particle 2 are drawn parallel to the axes $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{h}_1)_h$ in the rest system of particle 1.

The canonical or helicity frames for particle 4, are deduced from the canonical or helicity frames of particle 2 exactly in the same way that these frames were deduced from those associated to particle 1. Indeed, these frames are not useful for the two step sequential decay but they must be defined for the three step sequential decays.

2.2- Canonical and helicity invariant decay amplitudes

In the case $j_3 = 0$, the definitions of the invariant decay amplitudes given in Appendix A have simpler forms. In particular for ℓs coupling the quantum number s is fixed, $s = j_2$. The canonical and helicity invariant amplitudes are denoted by A^ℓ and $A(m_2)$. They are related by the real orthogonal transformation

$$A(m_2) = \sum_\ell \frac{\sqrt{2\ell+1}}{\sqrt{2j_1+1}} < j_1 m_2 | \ell 0 j_2 m_2 > A^\ell \quad , \tag{16a}$$

$$A^\ell = \sum_{m_2} \frac{\sqrt{2\ell+1}}{\sqrt{2j_1+1}} < \ell 0 j_2 m_2 | j_1 m_2 > A(m_2) \quad . \tag{16b}$$

The decay amplitudes are

$$A_{c\ m_1}^{\ m_2} = \sum_\ell < \ell m j_2 m_2 | j_1 m_1 > Y_m^\ell(\Omega_2)\ A^\ell \quad , \tag{17}$$

$$A_{h\ m_1}^{\ m_2} = \sqrt{\frac{2j_1+1}{4\pi}}\ D^{j_1}\ (\Omega_2^{-1})^{m_2}_{\ m_1}\ A(m_2) \tag{18}$$

and for parity conserving decays the invariant amplitudes satisfy the parity relations

$$A^\ell = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 (-1)^\ell\ A^\ell \tag{19a}$$

$$A(m_2) = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 (-1)^{j_1 - j_2}\ A(-m_2) \tag{19b}$$

For the usual one amplitude decays, Table I gives the non-vanishing canonical amplitudes, the helicity amplitudes and their parity relations. The usual two amplitudes decays are studied in the next sub-section.

2.3- Decay parameters for two amplitude decays

Let us call ζ_1 and ζ_2 the two complex non-vanishing canonical amplitudes which describe the dynamics of a two amplitude decay. The observables depend on these complex numbers through the bilinear combinations $|\zeta_1|^2, |\zeta_2|^2, \zeta_1^* \zeta_2$, i.e., they are independent of the overall phase of ζ_1 and ζ_2. Besides it is possible to normalize the amplitudes such that $|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 = 1$. Then it is convenient to parametrize the dynamics by the three real canonical decay parameters

$$\alpha = 2\ \mathrm{Re}\ \zeta_1^* \zeta_2, \quad \beta = 2\ \mathrm{Im}\ \zeta_1^* \zeta_2 \quad , \gamma = |\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2 \quad , \tag{20}$$

which satisfy the relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 1 \tag{21}$$

If ζ_1' and ζ_2' are the two corresponding independent helicity amplitudes normalized to $|\zeta_1'|^2 + |\zeta_2'|^2 = |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 = 1$, they are related to ζ_1 and ζ_2 by the real orthogonal transformation (16a) which can be written as a rotation

$$\zeta'_1 = \cos\theta\ \zeta_1 - \sin\theta\ \zeta_2$$
$$\zeta'_2 = \sin\theta\ \zeta_1 + \cos\theta\ \zeta_2 \qquad (22)$$

From ζ'_1 and ζ'_2 one may define the three real helicity decay parameters

$$\alpha' = 2\ \mathrm{Re}\ \zeta'^{*}_1\ \zeta'_2\ ,\quad \beta' = 2\ \mathrm{Im}\ \zeta'^{*}_1\ \zeta'_2\ ,\quad \gamma' = |\zeta'_1|^2 - |\zeta'_2|^2\ , \qquad (23)$$

with

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1\ . \qquad (24)$$

It is easy to show that these parameters α', β', γ' are related to α, β, γ by the rotation

$$\begin{bmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos 2\theta & 0 & \sin 2\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin 2\theta & 0 & \cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} \qquad (25)$$

For the usual two amplitudes decays, in Table II, we define the complex numbers ζ_1, ζ_2 and ζ'_1, ζ'_2 and the value of $\cos\theta$ and $\sin\theta$ for each decay.

Note that for the parity violating decay $j_1 \to \frac{1}{2}\ 0$, one has $\cos\theta = -\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, thus $\cos 2\theta = 0$, $\sin 2\theta = -1$ and hence

$$j_1 \to \tfrac{1}{2}\ 0\ ,\quad \alpha' = -\gamma\ ,\ \beta' = \beta\ ,\ \gamma' = +\alpha \qquad (26)$$

In this case the decay parameters are often called the asymmetry parameters.

3 - OBSERVABLES IN A SINGLE DECAY

For a single decay with $j_3 = 0$, the observables are

i) the normalized angular distribution $I(\Omega_2)$ of particle 2, with respect to a frame $\{p_1\}$ for particle 1. It is obtained from the polarization density operator ρ_1 and the decay operator A by

$$I(\Omega_2) = N\ \mathrm{tr}\ (A\rho_1 A^{\dagger}) \qquad (27)$$

where the normalization coefficient N, such that $\int I(\Omega_2)\,d\Omega_2 = 1$, is given by

$$N^{-1} = \frac{1}{2j_1+1}\int d\Omega_2\ \mathrm{tr}\ (AA^{\dagger}) \qquad (28)$$

Note that this coefficient does not depend on the initial polarization ρ_1 and hence the normalized angular distribution is actually a linear function of the initial polarization.

ii) the polarization angular distribution of the final particle 2 given by

$$I(\Omega_2)\ \rho_2 = N\ A\rho_1 A^{\dagger} \qquad (29)$$

Let $\{p_2\}$ be a frame associated to the 4-momentum $\underline{p}_2$, the corresponding

multipole parameter angular distribution is

$$I(\Omega_2)\; t(\{p_2\})^{L_2}_{M_2} = N \,\mathrm{tr}\left[T(\{p_2\})^{L_2}_{M_2}\, A\rho_1 A^{+}\right] \qquad (30)$$

This section is devoted to a description of the single decay angular and polarization angular distributions of the usual one and two amplitude decays.

3.1- The single decay angular distribution

Using the expression (17) or (18) for the decay amplitude and the multipole expansion (B7) for the polarization density matrix of particle 1 one obtains for the angular distribution (27) an expression of the type

$$\boxed{I(\Omega_2) = \sum_{L_1=0}^{2j_1} C(L_1) \sum_{M_1=-L_1}^{+L_1} t^{L_1}_{M_1}{}^{*}\, Y^{L_1}_{M_1}(\Omega_2)\ .} \qquad (31)$$

The normalization coefficient N is given by

$$N^{-1} = \sum_{\ell} \left|A^{\ell}\right|^2 = \sum_{m_2} \left|A(m_2)\right|^2 . \qquad (32)$$

We normalize the invariant decay amplitudes so that the coefficient N is 1. Then the expression of the real decay coefficients $C(L_1)$, as function of the spins j_1 and j_2 and of the dynamics of the decay through the invariant canonical amplitudes A^{ℓ}, reads

$$\boxed{\sqrt{4\pi}\, C(L_1) = (-1)^{j_1+j_2} \sqrt{2j_1+1} \sum_{\ell\ell'} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \begin{Bmatrix} j_1 & j_1 & L_1 \\ \ell & \ell' & j_2 \end{Bmatrix} < \ell 0 \ell' 0 | L_1 0 > A^{\ell}\, A^{\ell'}{}^{*}} \qquad (33)$$

while their expression in terms of the invariant helicity amplitudes $A(m_2)$ is

$$\boxed{\sqrt{4\pi}\, C(L_1) = \sqrt{2L_1+1} \sum_{m_2} < j_1 m_2 | j_1 m_2 L_1 0 > \left|A(m_2)\right|^2} \qquad (34)$$

Note that for $L_1 = 0$ the coefficient does not depend on the amplitudes

$$\sqrt{4\pi}\, C(0) = 1 \ ; \qquad (35)$$

and that if parity is conserved in the decay, cf.Eq. (19a) or (19b), the coefficients $C(L_1)$ vanish for odd values of L_1.

Consider the decay coefficients of the usual one and two amplitude decays.

(i) one amplitude decays. In this case the dynamics disappear from the expressions of the decay coefficients ; Eq.(33) and (34) reduce to

$$\sqrt{4\pi}\, C(L_1) = (-1)^{j_1+j_2} \sqrt{2j_1+1}\, (2\ell+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_1 & L_1 \\ \ell & \ell & j_2 \end{Bmatrix} < \ell 0 \ell 0 | L_1 0 > \qquad (36a)$$

$$\sqrt{4\pi}\, C(L_1) = \sqrt{2L_1+1} < j_1 m_2 | j_1 m_2 L_1 0 > \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\ , \quad m_2 \geqslant 0 \qquad (36b)$$

Of course for each one amplitude decay there is a correspondance between the value of ℓ in Eq.(36a) and the value of m_2 in Eq.(36b) so that both expressions yield the same values for the decay coefficients.
The expression of the non vanishing decay coefficients of the usual one amplitude decays are given in Table III, as functions of j_1 and L_1. This Table is taken from Ref.[14].

ii) two amplitude decays. For the decays which involve two independent invariant amplitudes the decay coefficients $C(L_1)$ depend on the dynamics through the decay parameters defined in Section 2.3. Indeed it is easier to compute them as functions of the helicity decay parameters since it is obvious on Eq.(34) that only the parameter γ' will appear. Using Eq.(25) and the values of $\cos\theta$ and $\sin\theta$ given in Table II it is then easy to express the decay coefficients as functions of the two canonical decay parameters α and γ.
We consider first the parity violating decay $j_1 \to \frac{1}{2}\ 0$ for which, as we noted in Eq.(26), one has $\gamma' = \alpha$. The decay coefficients read

$$\sqrt{4\pi}\ C(L_1) = \sqrt{2L_1+1}\ \langle j_1\ \tfrac{1}{2} | j_1\ \tfrac{1}{2}\ L_1 0 \rangle \left[\frac{1+(-1)^{L_1}}{2} + \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\ \alpha \right] \qquad (37)$$

The coefficients with L_1 even are independent of α while the coefficients with L_1 odd are proportional to α.
For the other two amplitude decays (3) it is interesting to remark that their decay coefficients, denoted by $C_2(L_1, j_2)$, are proportional to the decay coefficients $C_1(L_1, j_2 - 1)$ of the corresponding one amplitude decays in (2), cf Ref.[15]

$$C_2(L_1, j_2) = C_1(L_1, j_2 - 1) \left[\frac{1+\mu}{2} + \gamma' \frac{1-\mu}{2} \right] \qquad (38)$$

with

$$\mu = \frac{\langle j_1\ j_2 | j_1\ j_2 L_1\ 0 \rangle}{\langle j_1 j_2^{-1} | j_1 j_2^{-1}\ L_1 0 \rangle} \qquad (39)$$

The analytic expression of μ for the two amplitude decays are given in Table IV, as functions of j_1 and L_1. This table is taken from Ref.[16].

The single decay angular distribution allows to measure the polarization of the decaying particle, by means of its moments

$$\langle Y_{M_1}^{L_1}(\Omega_2) \rangle = \int I(\Omega_2)\ Y_{M_1}^{L_1}(\Omega_2)\ d\Omega_2 \ . \qquad (40)$$

From the expansion (31) one gets

$$\langle Y_{M_1}^{L_1}(\Omega_2) \rangle = C(L_1)\ t_{M_1}^{L_1} \ . \qquad (41)$$

Thus the moments of the angular distribution yield the multipole parameters $t_{M_1}^{L_1}$ up to the decay coefficient $C(L_1)$. Of course if this coefficient vanish the corresponding multipoles are not measurable. For

instance for the odd values of L_1, in a parity conserving decay, one has $C(L_1) = 0$, and hence the odd polarization is not measurable in such a decay. Note that the odd polarization is measurable, up to the asymmetry parameter α, in the parity violating decay $j_1 \to \frac{1}{2}\ 0$, (cf.Eq.37).

3.2- Polarization angular distribution

The polarization angular distribution of the final particle 2 depends on the choice of the frame $\{p_2\}$ with respect to which it is defined. We shall consider the two main possible choices, namely the canonical frame and the helicity frame which have been defined in Section 2.

3.2.1-The canonical frame

Using expression (17) of the decay amplitudes and the multipole expansion (B7) of the density matrices one obtains for the polarization angular distribution (30) an expression of the type

$$I(\Omega_2)\ t(\{p_2\}_c)^{L_2}_{M_2}{}^{*} = \sum_{L,L_1} K(L_1L_2L) \sum_{M_1 M} \langle LML_2M_2 | L_1M_1 \rangle\ t^{L_1}_{M_1}{}^{*}\ Y^L_M(\Omega_2) . \tag{42}$$

The canonical decay coefficients $K(L_1L_2L)$ depend on the spins j_1 and j_2 and on the dynamics of the decay. They satisfy the identity

$$K(L_1L_2L)^{*} = (-1)^{L_1+L_2+L}\ K(L_1L_2L) \quad , \tag{43}$$

i.e., the coefficients with L_1+L_2+L even are real, those with L_1+L_2+L odd are imaginary. Their expression, in terms of the canonical invariant amplitudes is [2,6,7]

$$\sqrt{4\pi}\ K(L_1L_2L) = \sqrt{2L_1+1}\ \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)}\ \ Q(L_1L_2L) \tag{44a}$$

$$Q(L_1L_2L) = \sum_{\ell\ell'} (-1)^{\ell'}\ \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \begin{Bmatrix} j_2 & j_2 & L_2 \\ j_1 & j_1 & L_1 \\ \ell & \ell' & L \end{Bmatrix} \langle \ell 0 \ell' 0 | L 0 \rangle\ A^{\ell} A^{\ell'}{}^{*} \tag{44b}$$

By using the relation (16b) between the canonical and helicity invariant amplitudes one gets the following expression of the coefficients $K(L_1L_2L)$

$$\sqrt{4\pi}\ K(L_1L_2L) = \sqrt{2L+1}\ \langle L0L_2M_2 | L_1M_2 \times j_2m_2 | j_2n_2L_2M_2 \times j_1m_2 | j_1n_2L_2M_2 \rangle\ A(m_2)\ A(n_2)^{*} \tag{45}$$

From Eq.(19a) we note that for parity conserving decays, the waves ℓ and ℓ' have the same parity, i.e., $(-1)^{\ell} = (-1)^{\ell'}$, and hence the Clebsch-Gordan coefficient in Eq.(44b) vanishes unless L is even. Thus one has

$$K(L_1L_2L) = (-1)^{L}\ K(L_1L_2L) = (-1)^{L_1+L_2}\ K(L_1L_2L)^{*} \tag{46}$$

3.2.2-Helicity frame

By using expression (18) of the decay amplitudes and the multipole expansion (B7) of the density matrices one obtains for the polarization angular distribution (30) an expression of the type

$$I(\Omega_2)\; t(\{p_2\}_h)^{L_2}_{M_2}{}^{*} = \sum_{L_1} H(L_1 L_2 M_2) \sum_{M_1} t^{L_1}_{M_1}{}^{*} D^{L_1}(\Omega_2^{-1})^{M_2}_{M_1} \sqrt{\frac{2L_1+1}{4\pi}} \qquad (47)$$

The helicity decay coefficients $H(L_1 L_2 M_2)$ depend on the spins j_1 and j_2 and on the dynamics of the decay. They satisfy the identity

$$H(L_1 L_2 M_2)^{*} = H(L_1 L_2 -M_2) \quad , \qquad (48)$$

i.e., in particular the coefficients $H(L_1 L_2 0)$ are real. Their expression in terms of the helicity invariant amplitudes read [1,5]

$$\sqrt{4\pi}\; H(L_1 L_2 M_2) = \sqrt{2L_1+1} \sum_{m_2, n_2} \langle j_2 m_2 | j_2 n_2 L_2 M_2 \rangle \langle j_1 m_2 | j_1 n_2 L_1 M_2 \rangle A(m_2) A(n_2)^{*} \qquad (49)$$

Besides, using the relation (16a) between the helicity and canonical invariant amplitudes, one gets the following expression for the coefficients $H(L_1 L_2 M_2)$,

$$\sqrt{4\pi}\; H(L_1 L_2 M_2) = \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)} \sum_{L} \sqrt{2L+1}\, \langle L 0 L_2 M_2 | L_1 M_2 \rangle\, Q(L_1 L_2 L) \qquad (50)$$

with $Q(L_1 L_2 L)$ as in Eq.(44b).

By using the relations (46) we readily get the constraints on the coefficients $H(L_1 L_2 M_2)$, due to parity conservation,

$$H(L_1 L_2 -M_2) = (-1)^{L_1 + L_2}\, H(L_1 L_2 M_2) = H(L_1 L_2 M_2)^{*} \qquad (51)$$

3.3- Relations between the canonical and helicity decay coefficients.

From the polarization angular distribution (42) and (46), or from the expressions (44a), (44b) and (50), or from the expressions (45) and (49), one obtains the relations

$$K(L_1 L_2 L) = \sum_{M_2} \sqrt{\frac{2L+1}{2L_1+1}}\, \langle L 0 L_2 M_2 | L_1 M_2 \rangle\, H(L_1 L_2 M_2) \quad , \qquad (52a)$$

$$H(L_1 L_2 M_2) = \sum_{L} \sqrt{\frac{2L+1}{2L_1+1}}\, \langle L_1 M_2 | L 0 L_2 M_2 \rangle\, K(L_1 L_2 L) \quad . \qquad (52b)$$

The coefficients $K(L_1 L_2 L)$ and $H(L_1 L_2 M_2)$, at fixed values of L_1 and L_2, are thus related by a real orthogonal transformation. Let us study this transformation for arbitrary L_1 and for the lowest values of L_2.

(i) $L_2 = 0$. In this case one has only one possible value for $M_2 (M_2=0)$ and for L $(L=L_1)$, and the corresponding coefficients are equal. Furthermore in this case Eq.(42) and (46) yield the angular distribution (31) so that the coefficients K and H reduce to the decay coefficients $C(L_1)$

$$K(L_1 O L_1) = H(L_1 0 0) = C(L_1) \qquad (53)$$

(ii) $L_2 = 1$. We must consider two cases according to the values of L_1. If $L_1 = 0$ one has only one coefficient K or H since $M_2 = 0$ and $L = 1$; then

$$K(011) = - H(010) \qquad (54)$$

If $L_1 \geqslant 1$, one has 3 possible values for M_2 ($M_2 = +1, 0, -1$) and for L ($L = L_1+1, L_1, L_1-1$). The orthogonal transformation is represented by a 3×3 matrix.

(iii) $L_2 = 2$. We must consider three cases according to the values of L_1.

If $L_1 = 0$, there is only one coefficient K (L=2) and one coefficient H ($M_2=0$) which are equal.

If $L_1 = 1$, one has three possible values for L (L=3,2,1) and for M_2 ($M_2 = +1,0,-1$). The orthogonal transformation is represented by a 3×3 matrix.

If $L_1 \geqslant 2$, there are five possible values for L ($L = L_1 \pm 2, L_1 \pm 1, L_1$) and for M_2 ($M_2 = \pm 2, \pm 1, 0$). The orthogonal transformation is represented by a 5×5 matrix.

A similar analysis can be made for higher values of L_2. The matrices which represent the orthogonal transformations for arbitrary L_1 and for $L_2 \leqslant 2$ are gathered in Table V.

3.4- The canonical and helicity decay coefficients of the usual one and two amplitude decays

Each of the expressions (44), (45) and (49),(50) has its own advantages. For instance the parity properties of the coefficients were more easily derived on expressions (44) and (50). On the other hand expression (45) and (49), which involve only Clebsch-Gordan coefficients, allows one to compute easily analytic expression of the coefficients as functions of the initial spin j_1, which is very useful for spin tests, cf.Section 5. Let us consider the coefficients $K(L_1 L_2 L)$ and $H(L_1 L_2 M_2)$ in the particular cases of one and two amplitude decays.

(i) one amplitude decays. In this case the dynamical dependence of the coefficients $K(L_1 L_2 L)$ and $H(L_1 L_2 M_2)$ disappears and the coefficients are real. Then combining Eq.(43) and (46), and Eq.(48) and (51), one gets that the coefficients vanish unless L_1+L_2 is even. The values of the non-vanishing helicity coefficients $H(L_1 L_2 M_2)$ of the usual one amplitude decays $j_1^{\epsilon_1} \to 1^{\epsilon_2}\, 0^{\epsilon_3}$, $j_1^{\epsilon_1} \to \tfrac{1}{2}^{\epsilon_2}\, 0^{\epsilon_3}$ computed from Eq.(49) and (19b), i.e.,

$$\sqrt{4\pi}\, H(L_1L_2M_2) = \frac{1+(-1)^{L_1+L_2}}{2} \sqrt{2L_1+1}\, \{\delta_{M_2 0}\langle j_2 j_2 | j_2 j_2 L_2 0\rangle\langle j_1 j_2 | j_1 j_2 L_1 0\rangle$$

$$+ \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3(-1)^{j_1-j_2}\, \delta_{M_2,\pm 2j_2}\, \langle j_2 j_2 | j_2 -j_2 L_2 2j_2\rangle\langle j_1 j_2 | j_1 -j_2 L_1 2j_2\rangle\}, \quad j_2 = \tfrac{1}{2}, 1,$$

are given in Table VI. (55)

The corresponding non vanishing canonical decay coefficients $K(L_1L_2L)$ are deduced by the orthogonal transformation (52a). Their values are given in Table VII.

(ii) two amplitude decays. In this case the canonical and helicity decay coefficients depend on the dynamics through the decay parameters defined in Section 2.3. The structure of the coefficients is better understood on the expressions (44a) and (50). Indeed an analysis of the coefficient Q in Eq.(44b) shows that the canonical decay coefficients $K(L_1L_2L)$ can be written

$$K = K_o + A_c\alpha + iB_c\beta + C_c\gamma \tag{56}$$

where K_o, A_c, B_c, C_c are real coefficients such that

for L_1+L_2+L even $B_c = 0$, $K = K_o + A_c\alpha + C_c\gamma$, (57a)

for L_1+L_2+L odd $K_o = A_c = C_c = 0$, $K = iB_c\beta$. (57b)

For given L_1 and L_2 the corresponding helicity decay coefficients $H(L_1L_2M_2)$ are

$$H = H_o + A_h\alpha + iB_h\beta + C_h\gamma \tag{58}$$

where H_o, A_h, B_h, C_h are deduced from K_o, A_c, B_c, C_c respectively by Eq.(52b). Of course, by using the orthogonal transformation (25) which relates the decay parameters α, β, γ and α', β', γ' one may write the canonical and helicity decay parameters in terms of α', β', γ'. One gets

$$K = K_o + A'_c\alpha' + iB_c\beta' + C'_c\gamma' \tag{59a}$$

$$H = H_o + A'_h\alpha' + iB_h\beta' + C'_h\gamma' \tag{59b}$$

with

$$\begin{bmatrix} A'_{c,h} \\ C'_{c,h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{c,h} \\ C_{c,h} \end{bmatrix} \tag{60}$$

The coefficients H and K of the two amplitude decays $j_1^{\epsilon_1} \to 1^{\epsilon_2}\, 0^{\epsilon_3}$, $j_1 \to \tfrac{1}{2}\, 0$ are given in Table VIII and IX respectively.

4 - SEQUENTIAL DECAY ANGULAR DISTRIBUTION AND POLARIZATION MEASUREMENT

The sequential decay angular distributions is expanded on bases of orthogonal functions on the unit sphere, either the spherical harmonics or the matrix elements of the rotation matrices. By taking the moments of

these angular distributions one gets the coefficients of the expansions. These coefficients are the product of the decay coefficients times the decaying particle multipole parameters $t^{L_1}_{M_1}$. Thus, once the decay coefficients are known the measurement of the moments of sequential decay angular distribution may give information on the polarization of the initial particle. As we shall see information is more or less complete according to the nature of the decays.

4.1- Two step sequential decay angular distribution

Consider the two step sequential decay

$$1 \to 2 + 3 \quad , \quad 2 \to 4 + 5 \quad , \tag{61}$$

where we assume that particles 3 and 5 are spinless. Then the observables of the sequential decay are

(i) the sequential decay angular distribution $I(\Omega_2,\Omega_4)$ and

(ii) the polarization angular distribution of particle 4, $I(\Omega_2,\Omega_4)\rho_4$.

Let us denote by B the decay operator of $2 \to 4 + 5$ and let $I(\Omega_2)\rho_2$ be the polarization angular distribution of particle 2, cf.Eq.(30) and Section 3. The observables of the sequential decay (61) are then

$$I(\Omega_2,\Omega_4) = N' \; tr(B \; I(\Omega_2) \; \rho_2 \; B^+) \tag{62}$$

$$I(\Omega_2,\Omega_4)\rho_4 = N' \; B \; I(\Omega_2) \; \rho_2 \; B^+ \tag{63}$$

where the normalization coefficient N', such that $\int I(\Omega_2,\Omega_4)d\Omega_2 d\Omega_4 = 1$, is given by

$$N'^{-1} = \int d\Omega_4 \; tr\,(BB^+) \tag{64}$$

To compute the sequential decay angular distribution one has no new calculation to perform besides that of the decay coefficient $C(L_2)$ for $2 \to 4+5$ and the canonical or helicity decay coefficients, $K(L_1L_2L)$ or $H(L_1L_2M_2)$ for $1 \to 2+3$, which were done in Section 3 above. The sequential decay angular distribution depends on the choice of the quantization frame for the polarization of particle 2.

(i) canonical frame. If we choose the canonical frame for particle 2, cf. Section 3.2.1., we denote by $\Omega_4^c \equiv (\theta_4^c,\varphi_4^c)$ the angles of particle 4 with respect to this frame. Then the sequential decay angular distribution is denoted by $I(\Omega_2,\Omega_4^c)$ and its expression obtained from Eq.(31) and (42) is

$$I(\Omega_2,\Omega_4^c) = \sum_{LL_1L_2} K(L_1L_2L)C(L_2) \sum_{MM_1M_2} \langle LML_2M_2 | L_1M_1\rangle \; t^{L_1}_{M_1}{}^* \; Y^L_M(\Omega_2) \; Y^{L_2}_{M_2}(\Omega_4^c) \tag{65}$$

(ii) helicity frame. If we choose the helicity frame for particle 2, cf. Section 3.2.2. we denote by $\Omega_4^h = (\theta_4^h, \varphi_4^h)$ the angles of particle 4 with respect to this frame. The sequential decay angular distribution $I(\Omega_2, \Omega_4^h)$ obtained from Eq.(31) and (47) reads [11]

$$\boxed{I(\Omega_2, \Omega_4^h) = \sum_{L_1 L_2 M_2} H(L_1 L_2 M_2) C(L_2) \sum_{M_1} t_{M_1}^{L_1 *} \sqrt{\frac{2L_1+1}{4\pi}} D^{L_1}(\Omega_2^{-1})^{M_2}_{M_1} Y_{M_2}^{L_2}(\Omega_4^h)} \quad (66)$$

4.2- Polarization measurement by the two step sequential decay angular distribution

(i) For the sequential decay angular distribution defined in the canonical frame the moments are

$$\langle Y_M^L(\Omega_2) Y_{M_2}^{L_2}(\Omega_4^c) \rangle = \int I(\Omega_2, \Omega_4^c) Y_M^L(\Omega_2) \; Y_{M_2}^{L_2}(\Omega_4^c) \; d\Omega_4^c \; d\Omega_2 \quad (67)$$

It is interesting to define the linear combination of the moments

$$E(L_1 M_1 L_2 L) = \sum_{M, M_2} \langle L M L_2 M_2 | L_1 M_1 \rangle \langle Y_M^L(\Omega_2) \; Y_{M_2}^{L_2}(\Omega_4^c) \rangle \quad (68)$$

Indeed, for the angular distribution (65) one gets

$$\boxed{E(L_1 M_1 L_2 L) = K(L_1 L_2 L)^* \; C(L_2) \; t_{M_1}^{L_1}} \quad (69)$$

Hence a measurement of the moments $E(L_1 M_1 L_2 L)$ yields the multipole parameters $t_{M_1}^{L_1}$ up to the decay coefficients of the sequential decay.

(ii) For the sequential decay angular distribution defined in the helicity frame the moments are

$$F(L_1 M_1 L_2 M_2) \equiv \sqrt{\frac{2L_1+1}{4\pi}} \langle D^{L_1}(\Omega_2^{-1})^{M_2}_{M_1} \; Y_{M_2}^{L_2}(\Omega_4^h) \rangle$$

$$= \int I(\Omega_2, \Omega_4^h) \sqrt{\frac{2L_1+1}{4\pi}} D^{L_1}(\Omega_2^{-1})^{M_2}_{M_1} \; Y_{M_2}^{L_2}(\Omega_4^h) \; d\Omega_2 \; d\Omega_4^h \quad (70)$$

and from Eq.(66) one gets

$$\boxed{F(L_1 M_1 L_2 M_2) = H(L_1 L_2 M_2)^* \; C(L_2) \; t_{M_1}^{L_1}} \quad (71)$$

i.e. the moments are proportional to the multipole parameters.
Note that for fixed L_1, M_1, L_2 the moments $F(M_2)$ and $E(L)$ are related by the same orthogonal transformation (52) that the decay coefficients $H(M_2)$ and $K(L)$ and hence the measurements of the moments in canonical and in helicity frames are completely equivalent.

Let us see what can be measured in some usual physical situations. The analysis is more easily done on Eq.(69) with the canonical decay coefficients, (cf. Section 3.4).

(i) Assume that the second decay is a one amplitude decay : $C(L_2)$ vanish

unless L_2 is even. Then we should only consider the K coefficients for L_2 even. If the first decay is parity conserving L is even, besides, if it is a one amplitude decay L_1 is even and K is real ; if it is a two amplitude decay for L_1 even K is real and involves α and γ, while for L_1 odd K is pure imaginary proportional to β, cf.Eq.(57).

(ii) Assume that the second decay is the parity violating $j_1 \to \frac{1}{2}\ 0$ then $C(L_2)$ does not vanish whatever the value of L_2. For L_2 even the analysis of K is similar to the above one and for L_2 odd one must change the expression "L_1 odd" into "L_1 even" and vice versa.
The net result is that the measurement of the angular distribution of a sequential decay whose first decay involves two amplitudes, allows the measurement of even and odd polarisation, up to the knowledge of the decay coefficients α, β, γ.

4.3- Sequential decay polarization angular distribution

To compute the polarization angular distribution of the final particle 4 it is sufficient to know the canonical or helicity decay coefficients of each of the decays in the sequential decay (61). Hence no new calculation is needed besides that of Section 3 above.
The sequential decay polarization angular distribution of particle 4 depends on the choice of quantization frames for particles 2 and 4. Generally one chooses canonical or helicity frames for both particles. This is what we shall do in the following. However it is possible to mix the choices, for instance canonical frame for particle 2 and helicity frame for particle 4.

(i) canonical frames. We denote by $K(L_2 L_4 L')$ the canonical decay coefficient of $2 \to 4 + 5$. Then the sequential decay polarization angular distribution is

$$I(\Omega_2, \Omega_4^c)\ t(\{p_4\}_c)^{L_4 *}_{M_4} = \sum_{L_1 L_2 L L'} K(L_1 L_2 L) K(L_2 L_4 L') \sum_{M_1 M_2 M M'} \langle L M L_2 M_2 | L_1 M_1 \rangle$$
$$\langle L' M' L_4 M_4 | L_2 M_2 \rangle\ t^{L_1 *}_{M_1}\ Y^L_M(\Omega_2)\ Y^{L'}_{M'}(\Omega_4^c) \qquad (72)$$

(ii) helicity frames. The corresponding expression for helicity frames reads

$$I(\Omega_2, \Omega_4^h)\, t(\{p_4\}_h)^{L_4 *}_{M_4} = \sum_{L_1 L_2 M_2} H(L_1 L_2 M_2)\ H(L_2 L_4 M_4) \sum_{M_1} t^{L_1 *}_{M_1}$$
$$\sqrt{\frac{(2L_1+1)(2L_2+1)}{(4\pi)^2}}\ D^{L_1}(\Omega_2^{-1})^{M_2}_{M_1}\ D^{L_2}(\Omega_4^{h\,-1})^{M_4}_{M_2} \qquad (73)$$

where $H(L_2 L_4 M_4)$ is the helicity decay coefficient for $2 \to 4 + 5$.

4.4- Three step sequential decay angular distribution

Assume that the decay (61) is also followed by the decay of particle 4

$$1 \to 2 + 3 \quad , \quad 2 \to 4 + 5 \quad , \quad 4 \to 6 + 7 \tag{74}$$

This is a three step sequential decay. Following the same procedure as for two step sequential decay one gets the sequential decay angular distribution for this process. With respect to canonical frames Eq.(72) gives

$$I(\Omega_2,\Omega_4^c,\Omega_6^c) = \sum_{L_1 L_2 L L' L''} K(L_1 L_2 L) K(L_2 L_4 L') C(L_4) \sum_{M_1 M_2 M M' M''} \langle L M L_2 M_2 | L_1 M_1 \rangle$$

$$\langle L' M' L_4 M_4 | L_2 M_2 \rangle \; t_{M_1}^{L_1 *} \; Y_M^L(\Omega_2) \; Y_{M'}^{L'}(\Omega_4^c) \; Y_{M_4}^{L_4}(\Omega_6^c) \tag{75}$$

while with respect to helicity frames Eq.(73) yields

$$I(\Omega_2,\Omega_4^h,\Omega_6^h) = \sum_{\substack{L_1 L_2 L_4 L_6 \\ M_2 M_4 M_6}} H(L_1 L_2 M_2) \; H(L_2 L_4 M_4) \; C(L_4) \sum_{M_1} t_{M_1}^{L_1 *}$$

$$\sqrt{\frac{(2L_1+1)(2L_2+1)}{(4\pi)^2}} \; D^{L_1}(\Omega_2^{-1})^{M_2}{}_{M_1} \; D^{L_2}(\Omega_4^{h\,-1})^{M_4}{}_{M_2} \; Y_{M_4}^{L_4}(\Omega_6^h) \tag{76}$$

The complexity of these expressions is essentially due to the number of indices to be summed over. However their structure is very clear and the interested reader could quite easily write down the angular distribution of higher order sequential decays.

5 - MEASUREMENT OF THE DECAY PARAMETERS AND OF THE SPIN

We have noticed that the measurement of the polarization in a sequential decay with a two amplitude decay at the first step depends on the knowledge of the decay parameters α, β, γ. However a careful analysis of Eq.(69) or (71) shows that these parameters and the spin j_1 of the decaying particle can themselves be measured in these processes. The principle of this measurement is that if a given multipole parameter $t_{M_1}^{L_1}$ can be obtained through two (or more) moments $E(L_1 M_1 L_2 L)$ or $F(L_1 M_1 L_2 M_2)$, i.e., for different values of L_2 and L or M_2, then the compatibility of the resulting $t_{M_1}^{L_1}$ yields constraints on the decay parameters and on the spin of decaying particle.

5.1- Canonical frame

We study first the determination of α, β, γ and j_1, from the measurement of the canonical moments $E(L_1 M_1 L_2 L)$ on an example. Consider the

coefficients. By using their expression (45) which involves the helicity decay coefficients α', β', γ', with Clebsch-Gordan coefficients whose ratio are known functions of j_1, one gets an expression for the spin $j_1(j_1+1)$ in terms of the moments $E(L_1M_1L_2L)$.

5.2- Helicity frame

Let us consider the same example that for the canonical frame, cf.Eq.(94). For fixed L_1 and M_1 the moments with L_2 even are

$$F(L_1M_1 00),\ F(L_1M_1 20),\ F(L_1M_1 2+1),\ F(L_1M_1 2+2) \qquad (80)$$

i.e., the multipole $t^{L_1}_{M_1}$ can be obtained through 4 different moments. The equality of the results yields 3 equations

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{H(L_1 00)}{F(L_1M_1 00)} = \frac{H(L_1 20)}{F(L_1M_1 20)} = \frac{H(L_1 21)}{F(L_1M_1 21)} = \frac{H(L_1 22)}{F(L_1M_1 22)} \qquad (81)$$

For L_1 odd the decay coefficients $H(L_1 00)$, $H(L_1 20)$ and $H(L_1 22)$ vanish and $H(L_1 21)$ is proportional to $i\beta'$. Hence one has no possibility of determining β' and one must check that the moments $F(L_1M_1 00)$, $F(L_1M_1 20)$ and $F(L_1M_1 22)$ vanish for L_1 odd.

For L_1 even the 3 equations are linear in the unknown α' and γ' with coefficients depending on j_1 through the ratio of the Clebsch-Gordan coefficients and the μ coefficients whose analytic expressions are known. The compatibility condition of the system gives an equation for the quantity $j_1(j_1+1)$ and the resolution of the system yields α' and γ' in terms of the moments F.

The analysis of this section is at the basis of the tests proposed by Berman-Jacob [9,10] and by Chung [11]. These authors do not write the general system of linear equations in the decay parameters but their idea is the same as ours namely to use the multiple determination of a given parameter to obtain a condition on the spin j_1 of the decaying particle in terms of the F moments.

It is evident that the spin tests in terms of the E moments (in canonical frame) and in terms of the F moments (in helicity frame) are equivalent since they are two aspects of the same principle. Indeed one may verify in each case, by using the orthogonal transformation which relates the E moments to the F moments that the two expressions of j_1, and of α' and γ', are identical.

Finally we remark that although the decay parameter $\beta = \beta'$ of (77) is not measurable by this method, its absolute value is given by $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ and hence the odd polarization of the decaying particle

is obtained up to the sign.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to Professors Manuel Doncel and Louis Michel for several fruitful discussions and to the Universidad Autonoma de Barcelona and the Institut des Hautes Etudes Scientifiques for their hospitality. They also thank Professor J.T. Donohue for bringing several references to their attention.

APPENDIX A : TWO-PARTICLE STATES AND INVARIANT DECAY AMPLITUDES FOR ARBITRARY SPINS

Consider the single decay

$$1 \to 2 + 3 \qquad \text{(A1)}$$

We denote by $|\{p_1\}m_1\rangle$ the state of particle 1 with 4-momentum $\underline{p}_1$ and magnetic quantum number m_1 ($-j_1 \leq m_1 \leq j_1$) along the quantization axis $\underline{z}_1$. Similarly we denote by $|\{p_i\}_c m_i\rangle$ and $|\{p_i\}_h m_i\rangle$ the state of particle i (i = 2 or 3) with 4-momentum $\underline{p}_i$ and magnetic quantum number m_i ($-j_i \leq m_i \leq j_i$) along the quantization axis $(\underline{z}_i)_c$ of the canonical frame and $(\underline{z}_i)_h$ of the helicity frame. From the definitions (11) and (12) of these frames one deduces

$$|\{p_i\}_h m_i\rangle = |\{p_i\}m_i'\rangle \; D^j(\Omega_i)^{m_i'}{}_{m_i} \qquad \text{(A2)}$$

A.1- Two particle states

The final state of particle 2 and 3 can be described by the tensor product of the states $|\{p_2\}m_2\rangle \otimes |\{p_3\}m_3\rangle$. However these states do not transform irreducibly under the action of the Poincaré transformations. Two types of irreducible states obtained by coupling of the tensor products are commonly used : the canonical states (ℓs coupling) and the helicity states (helicity coupling) [17]. These irreducible states are labelled by a tetrad $\{p\}$ associated to the 4-momentum $\underline{p} = \underline{p}_2 + \underline{p}_3$, by the total angular momentum J and the total magnetic quantum number M along the direction $\underline{z}$ of the tetrad $\{p\}$. In addition they are labelled by Poincaré invariant quantum numbers characteristic of the coupling.

(i) canonical states. For frames $\{p_2\}_c$ and $\{p_3\}_c$ canonically deduced from the frame $\{p\}$, the ℓs coupling gives the canonical states

$$|\{p\}JM;\ell s\rangle = \int d\Omega_2 \; Y_m^{\ell}(\Omega_2) |\{p_2\}_c m_2\rangle \otimes |\{p_3\}_c m_3\rangle \langle j_2 m_2 j_3 m_3 | s\sigma\rangle\langle \ell m s\sigma | JM\rangle \qquad \text{(A3)}$$

(ii) helicity states. For frames $\{p_2\}_h$ and $\{p_3\}_h$, the helicity coupling gives the helicity states

$$|\{p\}JM;m_2 m_3\rangle = \int d\Omega_2 \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \; |\{p_2\}_h m_2\rangle \otimes |\{p_3\}_h m_3\rangle \; D^J(\Omega_2^{-1})^{m_2+m_3}{}_M \qquad \text{(A4)}$$

These states are related by a real orthogonal transformation.

$$|\{p\}JM;\ell s\rangle = \sum_{m_2 m_3} |\{p\}JM;m_2 m_3\rangle \sqrt{\frac{2\ell+1}{2J+1}} \; \langle j_2 m_2 j_3 m_3 | s\sigma\rangle\langle \ell 0 s\sigma | J\sigma\rangle \qquad \text{(A5a)}$$

$$|\{p\}JM;m_2 m_3\rangle = \sum_{\ell s} |\{p\}JM;\ell s\rangle \sqrt{\frac{2\ell+1}{2J+1}} \; \langle J\sigma | \ell 0 s\sigma\rangle\langle s\sigma | j_2 m_2 j_3 m_3\rangle \qquad \text{(A5b)}$$

The parity operator π acts on these states in the following way

$$U(\pi)|\{p\}JM;\ell s\rangle = \epsilon_2\epsilon_3(-1)^{\ell}\,|\{p\}JM;\ell s\rangle \tag{A6a}$$

$$U(\pi)|\{p\}JM;m_2m_3\rangle = \epsilon_2\epsilon_3(-1)^{J-j_2-j_3}\,|\{p\}JM;-m_2-m_3\rangle \tag{A6b}$$

By inversion of the relations (A3) and (A4) one gets

$$|\{p_2\}_c m_2\rangle \otimes |\{p_3\}_c m_3\rangle = \sum_{J,\ell,s} Y^{\ell}_{m}(\Omega_2)^{*}\,|\{p\}JM;\ell s\rangle\langle JM|\ell ms\sigma\rangle\langle s\sigma|j_2m_2j_3m_3\rangle \tag{A7}$$

$$|\{p_2\}_h m_2\rangle \otimes |\{p_3\}_h m_3\rangle = \sum_{J} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\,|\{p\}JM;m_2m_3\rangle\, D^{J}(\Omega_2)^{M}_{\ m_2+m_3} \tag{A8}$$

A.2- Canonical and helicity invariant decay amplitudes

The decay amplitudes for process (A1) are the matrix elements of the decay operator A between the initial and final states,

$$A^{m_2m_3}_{\ m_1} = \langle \{p_2\}m_2| \otimes \langle\{p_3\}m_3|A|\{p_1\}m_1\rangle\ . \tag{A9}$$

Using Eq.(A7) or (A8) they can be written with irreducible states

(i) for canonical frames

$$A_c{}^{m_2m_3}_{\ m_1} = \sum_{J,\ell,s} \langle j_2m_2j_3m_3|s\sigma\rangle\langle\ell ms\sigma|JM\rangle\, Y^{\ell}_{m}(\Omega_2)\langle\{p\}JM;\ell s|A|\{p_1\}m_1\rangle \tag{A10}$$

(ii) for helicity frames

$$A_h{}^{m_2m_3}_{\ m_1} = \sum_{J} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\, D^{J}(\Omega_2^{-1})^{m_2+m_3}_{\ M}\,\langle\{p\}JM;m_2m_3|A|\{p_1\}m_1\rangle \tag{A11}$$

By energy-momentum conservation in the decay one has $p_1 = p_2+p_3$ and hence the tetrad $\{p\}$ associated to $p = p_2+p_3$ can be chosen identical to the tetrad $\{p_1\}$ of the initial state. Then by Wigner-Eckart theorem the matrix elements of the scalar decay operator A are

$$\langle \{p_1\}JM;\ell s|A|\{p_1\}j_1m_1\rangle = \delta_{Jj_1}\,\delta_{Mm_1}\,A^{\ell s} \tag{A12}$$

$$\langle \{p_1\}JM;m_2m_3|A|\{p_1\}j_1m_1\rangle = \delta_{Jj_1}\,\delta_{Mm_1}\,A(m_2,m_3) \tag{A13}$$

The reduced matrix elements which only depend on the Poincaré invariant degeneracy quantum numbers are called the canonical invariant decay amplitudes $A^{\ell s}$ and the helicity invariant decay amplitudes $A(m_2,m_3)$. They are related by a real orthogonal transformation

$$A(m_2,m_3) = \sum_{\ell,s} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2j_1+1}}\,\langle j_1\sigma|\ell 0s\sigma\rangle\langle s\sigma|j_2m_2j_3m_3\rangle\ A^{\ell s} \tag{A14a}$$

$$A^{\ell s} = \sum_{m_2m_3} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2j_1+1}}\,\langle j_2m_2j_3m_3|s\sigma\rangle\langle\ell 0s\sigma|j_1\sigma\rangle\, A(m_2,m_3) \tag{14b}$$

such that

$$\sum_{m_2,m_3} |A(m_2,m_3)|^2 = \sum_{\ell,s} |A^{\ell s}|^2\ . \tag{A15}$$

Finally, if parity is conserved in the decay process, the invariant amplitudes satisfy the parity relations

$$A^{\ell s} = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 (-1)^{\ell} A^{\ell s} , \tag{A16a}$$

$$A(m_2, m_3) = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 (-1)^{j_1 - j_2 - j_3} A(-m_2, -m_3) . \tag{A16b}$$

APPENDIX B : POLARIZATION DENSITY MATRIX AND MULTIPOLES PARAMETERS

The polarization state of a spin j particle is described by a Hermitean, positive, trace one density operator ρ

$$\rho = \rho^{\dagger} \quad , \quad <\xi|\rho|\xi> \geqslant 0 \quad \forall \xi \quad , \quad \mathrm{tr}\,\rho = 1. \tag{B1}$$

In a frame $\{p\}$ associated to the 4-momentum $\underline{p}$ of the particle the density operator is represented by a $(2j+1)$-dimensional density matrix whose elements

$$\rho(\{p\})^{m}_{\ n} = <\{p\}\ m|\rho|\{p\}\ n> \tag{B2}$$

satisfy the properties

$$\rho^{m}_{\ n} = \rho^{n}_{\ m}{}^{*} \quad , \quad \sum_{m,n} \xi^{*}_{m}\, \rho^{m}_{\ n}\, \xi_{n} \geqslant 0 \quad \forall \xi_{m} \quad , \quad \sum_{m} \rho^{m}_{\ m} = 1 \tag{B3}$$

It is often convenient to expand the density operator on the basis of multipole operators

$$T(\{p\})^{L}_{M} = |\{p\}\ m><jm|jnLM><\{p\}\ n| \tag{B4}$$

which transform irreducibly under a rotation of the frame $\{p\}$

$$T(R\{p\})^{L}_{M} = T(\{p\})^{L}_{M'}\, D^{L}(R)^{M'}_{\ M} \quad . \tag{B5}$$

The multipole expansion reads

$$\rho = \sum_{L} \frac{2L+1}{2j+1}\ T(\{p\})^{L}_{M}\, t(\{p\})^{L}_{M}{}^{*} \quad , \tag{B6}$$

i.e., for the density matrix elements

$$\rho(\{p\})^{m}_{\ n} = \sum_{L} \frac{2L+1}{2j+1}\ <jm|jnLM>\, t(\{p\})^{L}_{M}{}^{*} \quad . \tag{B7}$$

The inverse relations to (B6) and (B7) are

$$t(\{p\})^{L}_{M} = \mathrm{tr}\,(\rho\ T(\{p\})^{L}_{M}) = \rho^{m}_{\ n} <jn|jmLM> \quad , \tag{B8}$$

and hence the multipole parameters $t(\{p\})^{L}_{M}$ transform as the multipole operators, cf.Eq.(B5), under a rotation of the frame $\{p\}$. Besides, from the hermiticity and trace one properties of the density matrix they satisfy the relations

$$t^{L}_{M}{}^{*} = (-1)^{M}\, t^{L}_{-M} \quad , \qquad t^{0}_{0} = 1 \quad . \tag{B9}$$

For the positivity conditions on the multipole parameters see Ref. [18].

REFERENCES

[1] N. Byers and S. Fenster,Phys.Rev.Lett.11 (1963), 52.

[2] M. Ademollo and R. Gatto, Phys.Rev.133B (1964) 531.

[3] J. Button-Schafer,Phys.Rev.139B (1965) 607.

[4] J. Button-Schafer and D.O. Huwe,Phys.Rev.134B (1964) 1372.

[5] J.D. Jackson, in High Energy Physics (Gordon and Breach, New-York 1965).

[6] E. De Rafael, Ann.Inst.Henri Poincaré, 5 (1966) 83.

[7] C. Henry and E. De Rafael,Ann.Inst.Henri Poincaré,2 (1965) 87.

[8] M. Ademollo,R. Gatto and G. Preparata,Phys.Rev.139B (1965) 1608, and Phys.Rev.140B (1965) 192.

[9] S.M. Berman and M. Jacob, SLAC Report n°43 (1965) and Phys.Rev., 139B (1965) 1023.

[10] S. Berman, Seminaire Trieste, p.913, IAEA Vienne (1965).

[11] S.U. Chung, Spin formalism, CERN Yellow Report 71-8, and Phys.Rev. 169 (1968) 1342.

[12] W. Koch in Analysis of Scattering and Decay, Nikolic, Gordon and Breach.

[13] M. Doncel,L. Michel,P. Minnaert, "Amplitude reconstruction for quasi two body reactions with unpolarized or polarized target" CERN Phys.II.

[14] M. Doncel,L. Michel,P. Minnaert, Nucl.Phys.B38 (1972) 477.

[15] M. Daumens,G. Massas,P. Minnaert, "Rigorous spin test from two amplitude strong decays", Nucl.Phys. (to be published).

[16] G. Massas, Thèse de 3e Cycle, Université de Bordeaux I.

[17] P. Moussa and R. Stora, in Analysis of Scattering and Decay, Nikolic, Gordon and Breach.

[18] P. Minnaert, Phys.Rev. 151 (1966) 1306.

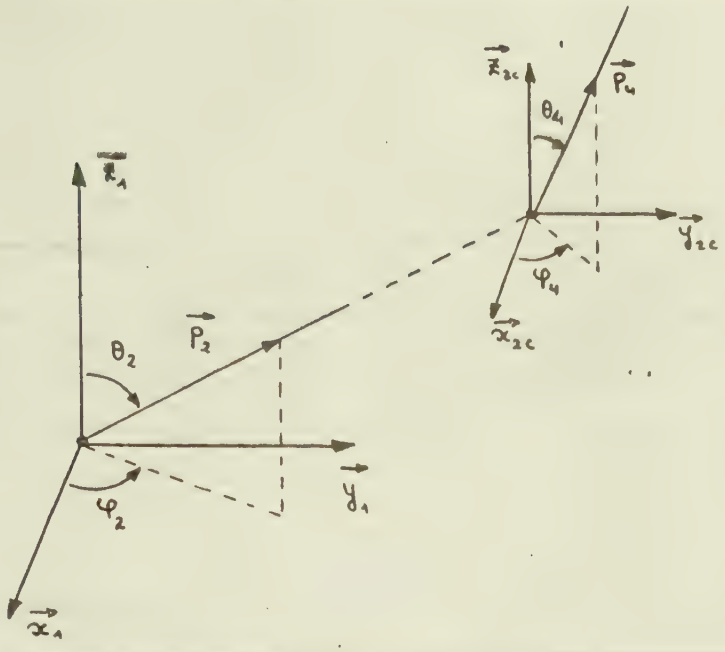

Fig. 1 : The canonical frame $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)_c$.

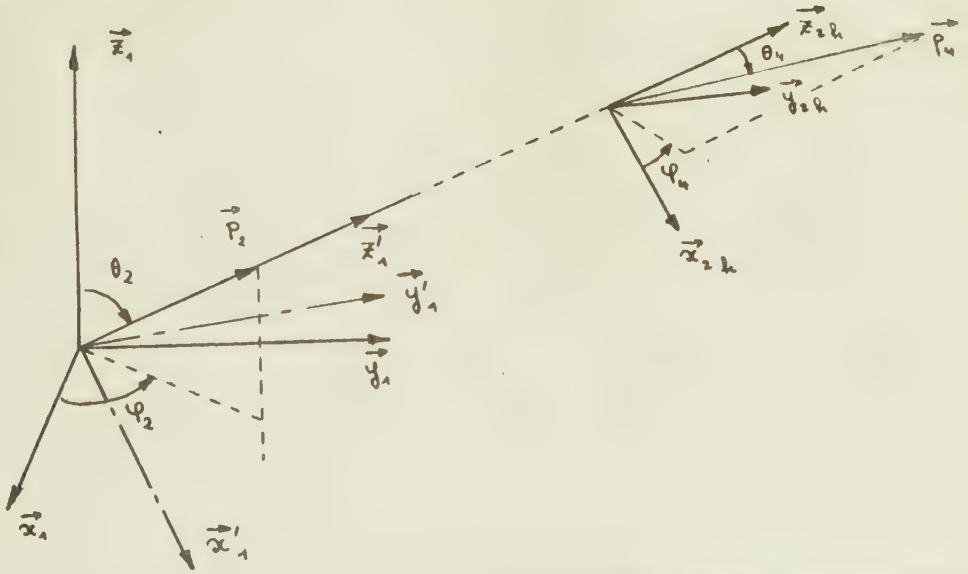

Fig. 2 : The helicity frame $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)_h$.

Decay	$\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$	non vanishing canonical amplitude	helicity amplitude and parity relations
$j_1^{\epsilon_1} \to 0^{\epsilon_2}\ 0^{\epsilon_3}$	$(-1)^{j_1}$	$A(j_1)$	$A(0)$
$j_1^{\epsilon_1} \to 1^{\epsilon_2}\ 0^{\epsilon_3}$	$(-1)^{j_1}$	$A(j_1)$	$A(0) \equiv 0$ $A(1) = -A(-1)$
$j_1^{\epsilon_1} \to \frac{1}{2}^{\epsilon_2}\ 0^{\epsilon_3}$	$(-1)^{j_1 - \frac{1}{2}}$	$A(j_1 - \frac{1}{2})$	$A(\frac{1}{2}) = A(-\frac{1}{2})$
	$(-1)^{j_1 + \frac{1}{2}}$	$A(j_1 + \frac{1}{2})$	$A(\frac{1}{2}) = -A(-\frac{1}{2})$

Table I - The usual one amplitude decays .

Decay	$\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3$	Non vanishing canonical amplitudes	Normalized helicity amplitudes and parity relations	cos θ	sin θ
$j_1^{\epsilon_1} \to 1^{\epsilon_2}\, 0^{\epsilon_3}$	$(-1)^{j_1+1}$	$\zeta_1 = A(j_1-1)$ $\zeta_2 = A(j_1+1)$	$\zeta_1' = A(0)$ $\zeta_2' = \sqrt{2}\,A(1) = \sqrt{2}\,A(-1)$	$\sqrt{\frac{j_1}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\frac{j_1+1}{2j_1+1}}$
$j_1^{\epsilon_1} \to 2^{\epsilon_2}\, 0^{\epsilon_3}$	$(-1)^{j_1+1}$	$\zeta_1 = A(j_1-1)$ $\zeta_2 = A(j_1+1)$	$A(0) \equiv 0$ $\zeta_1' = \sqrt{2}\,A(1) = -\sqrt{2}\,A(-1)$ $\zeta_2' = \sqrt{2}\,A(2) = -\sqrt{2}\,A(-2)$	$-\sqrt{\frac{j_1-1}{2j_1+1}}$	$-\sqrt{\frac{j_1+2}{2j_1+1}}$
$j_1 \to \frac{1}{2}\ 0$	parity violating	$\zeta_1 = A(j_1-\frac{1}{2})$ $\zeta_2 = -A(j_1+\frac{1}{2})$	$\zeta_1' = A(\frac{1}{2})$ $\zeta_2' = -A(-\frac{1}{2})$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
$j_1^{\epsilon_1} \to \frac{3}{2}^{\epsilon_2}\, 0^{\epsilon_3}$	$(-1)^{j_1+\frac{1}{2}}$	$\zeta_1 = A(j_1-\frac{3}{2})$ $\zeta_2 = A(j_1+\frac{1}{2})$	$\zeta_1' = \sqrt{2}\,A(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}\,A(-\frac{1}{2})$ $\zeta_2' = \sqrt{2}\,A(\frac{3}{2}) = \sqrt{2}\,A(-\frac{3}{2})$	$\sqrt{\frac{3(j_1-\frac{1}{2})}{4j_1}}$	$\sqrt{\frac{j_1+3/2}{4j_1}}$
	$(-1)^{j_1-\frac{1}{2}}$	$\zeta_1 = A(j_1-\frac{1}{2})$ $\zeta_2 = A(j_1+\frac{3}{2})$	$\zeta_1' = \sqrt{2}\,A(\frac{1}{2}) = -\sqrt{2}\,A(-\frac{1}{2})$ $\zeta_2' = \sqrt{2}\,A(\frac{3}{2}) = -\sqrt{2}\,A(-\frac{3}{2})$	$-\sqrt{\frac{j_1-\frac{1}{2}}{4(j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1+3/2)}{4(j_1+1)}}$

Table II. The usual two amplitude decays.

$j_1 \to \frac{1}{2}\ 0$	$\sqrt{\frac{4\pi}{2L_1+1}}\, C(L_1) = \frac{(-1)^{\frac{L_1}{2}} \binom{L_1}{\frac{L_1}{2}} \left(j_1 + \frac{L_1+1}{2}\right)^{\left[\frac{L_1}{2}\right]} \left(j_1 - \frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{L_1}{2}\right]}}{\sqrt{(2j_1+L_1+1)^{[L_1]}\ (2j_1)^{[L_1]}}}$
$j_1 \to 0\ 0$	$\sqrt{\frac{4\pi}{2L_1+1}}\, C(L_1) = \frac{(-1)^{\frac{L_1}{2}} \binom{L_1}{\frac{L_1}{2}} \left(j_1 + \frac{L_1}{2}\right)^{[L_1]}}{\sqrt{(2j_1+L_1+1)^{[L_1]}\ (2j_1)^{[L_1]}}}$
$j_1 \to 1\ 0$	$\sqrt{\frac{4\pi}{2L_1+1}}\, C(L_1) = \frac{(-1)^{\frac{L_1}{2}} \binom{L_1}{\frac{L_1}{2}} \left(j_1 + \frac{L_1}{2}\right)^{[L_1]}}{\sqrt{(2j_1+L_1+1)^{[L_1]}\ (2j_1)^{[L_1]}}} \left[\, 1 - \frac{L_1(L_1+1)}{2j_1(2j_1+1)} \,\right]$
otations :	$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$, $a^{[b]} = \frac{a!}{(a-b)!}$

Table III. The decay coefficients of the usual one amplitude decays, L_1 even.

$j_1 \to \frac{3}{2}\ 0$	$\mu = 1 - \frac{L_1(L_1+1)}{(j_1+3/2)(j_1-\frac{1}{2})}$
$j_1 \to 1\ 0$	$\mu = 1 - \frac{L_1(L_1+1)}{2j_1(j_1+1)}$
$j_1 \to 2\ 0$	$\mu = \frac{-1}{(j_1+2)(j_1-1)} \left[L_1(L_1+1) - 2j_1(j_1+1) + 2 - \frac{j_1^{\,2}(j_1+1)}{L_1(L_1+1) - 2j_1(j_1+1)} \right]$

Table IV. The μ factor of the usual two amplitude decay coefficients, L_1 even.

$L_2 = 0$

$L \backslash M_2$	0
L_1	1

$L_2 = 1$

$L_1 = 0$

$L \backslash M_2$	0
1	-1

$L_1 > 0$

$L \backslash M_2$	0	± 1
$L_1 + 1$	$-\frac{L_1 + 1}{2L_1 + 1}$	$\frac{L_1}{2(2L_1 + 1)}$
L_1	0	$\mp \frac{1}{2}$
$L_1 - 1$	$\frac{L_1}{2L_1 + 1}$	$\frac{L_1 + 1}{2(2L_1 + 1)}$

$L_1 = 0$

$L \backslash M_2$	0	1
2		

$L_1 = 1$

$L \backslash M_2$	0	± 1
3	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
2	0	$\pm \frac{1}{2}$
1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{10}$

$L_2 = 2$

$L_1 > 1$

$L \backslash M_2$	0	± 1	± 2
$L_1 + 2$	$\frac{3(L_1 + 1)(L_1 + 2)}{2(2L_1 + 3)(2L_1 + 1)}$	$-\frac{L_1 (L_1 + 2)}{(2L_1 + 3)(2L_1 + 1)}$	$\frac{L_1 (L_1 - 1)}{4(2L_1 + 3)(2L_1 + 1)}$
$L_1 + 1$	0	$\pm \frac{L_1 + 2}{2(L_1 + 1)}$	$\mp \frac{L_1 - 1}{2(2L_1 + 1)}$
L_1	$-\frac{L_1 (L_1 + 1)}{(2L_1 + 3)(2L_1 - 1)}$	$-\frac{3}{2(2L_1 + 3)(2L_1 - 1)}$	$\frac{3(L_1 - 1)(L_1 + 2)}{2(2L_1 + 3)(2L_1 - 1)}$
$L_1 - 1$	0	$\mp \frac{L_1 - 1}{2(2L_1 + 1)}$	$\mp \frac{L_1 + 2}{2(2L_1 + 1)}$
$L_1 - 2$	$\frac{3L_1 (L_1 - 1)}{2(2L_1 + 1)(2L_1 - 1)}$	$\frac{(L_1 + 1)(L_1 - 1)}{(2L_1 + 1)(2L_1 - 1)}$	$\frac{(L_1 + 1)(L_1 + 2)}{4(2L_1 + 1)(2L_1 - 1)}$

Table V. Values of the elements of the orthogonal matrix which relates the helicity and canonical decay coefficients for $L_2 = 0, 1, 2$. The table gives the square of the coefficients and their sign.

(a) $j_1^{\epsilon_1} \to \frac{1}{2}^{\epsilon_2}\, 0^{\epsilon_3}$ $\qquad \epsilon = \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = (-1)^{j_1+\frac{1}{2}}$

$$H(L_1L_2M_2) = \sqrt{\frac{2L_1+1}{4\pi}} < j_1\tfrac{1}{2}|j_1\tfrac{1}{2}L_1 0 > h(L_1L_2M_2)$$

$$h(L_1 00) = \frac{1+(-1)^{L_2}}{2}$$

$$h(L_1 10) = \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$h(L_1 1\pm 1) = \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\,\frac{\epsilon}{\sqrt{6}}\,\frac{2j_1+1}{\sqrt{L_1(L_1+1)}}$$

(b) $j_1^{\epsilon_1} \to 1^{\epsilon_2}\, 0^{\epsilon_3}$ $\qquad \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = (-1)^{j_1}$

$$H(L_1L_2M_2) = \sqrt{\frac{2L_1+1}{4\pi}} < j_1 1|j_1 1L_1 0 > h(L_1L_2M_2)$$

$$h(L_1 00) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}$$

$$h(L_1 10) = \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$h(L_1 20) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$h(L_1 1\pm 1) = h(L_1 2\pm 1) = 0$$

$$h(L_1 2\pm 2) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{L_1(L_1+1)}{(L_1-1)(L_1+2)}}\;\mu^{-1}$$

with

$$\mu^{-1} = \frac{2j_1(j_1+1)}{2j_1(j_1+1)-L_1(L_1+1)}$$

Table VI. The helicity decay coefficients for the usual one amplitude decays.

(a) $j_1^{\epsilon_1} \to \tfrac{1}{2}^{\epsilon_2}\ 0^{\epsilon_3}$ $\qquad \epsilon = \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\ (-1)^{j_1+\frac{1}{2}}$

$$K(L_1L_2L) = \sqrt{\frac{2L_1+1}{4\pi}} < j_1\tfrac{1}{2}\,|\,j_1\tfrac{1}{2}\,L_1 0 > k(L_1L_2L)$$

$$k(L_1 0 L_1) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2} \quad , \quad k(L_1 1 L_1) = 0$$

$$k(L_1 1 L_1\ 1) = \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\ \frac{\epsilon(2j_1+1) - (L_1+1)}{\sqrt{3(L_1+1)(2L_1+1)}}$$

$$k(L_1 1 L_1\ 1) = \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\ \frac{\epsilon(2j_1+1)+L_1}{\sqrt{3L_1(2L_1+1)}}$$

(b) $j_1^{\epsilon_1} \to 1^{\epsilon_2}\ 0^{\epsilon_3}$ $\qquad \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = (-1)^{j_1}$

$$K(L_1L_2L) = \sqrt{\frac{2L_1+1}{4\pi}} < j_1\ 1\,|\,j_1\ 1 L_1 0 > k(L_1L_2L)$$

$$k(L_1 0 L_1) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2} \quad , \quad k(L_1 1 L_1) = 0$$

$$k(L_1 1 L_1 {+}1) = \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \sqrt{\frac{L_1+1}{2L_1+1}}$$

$$k(L_1 1 L_1 {-}1) = \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \sqrt{\frac{L_1}{2L_1+1}}$$

$$k(L_1 2 L_1) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\ \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\ \sqrt{\frac{L_1(L_1+1)}{(2L_1-1)(2L_1+3)}}\ [\ 1 - 3\mu^{-1}]$$

$$k(L_1 2 L_1 {+}1) = k(L_1 2 L_1 {-}1) = 0$$

$$k(L_1 2 L_1 {+}2) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\ \frac{1}{2}\ \sqrt{\frac{3}{5}}\ \sqrt{\frac{(L_1+1)(L_1+2)}{(2L_1+3)(2L_1+1)}}\ \left[\ 1 + \frac{L_1}{L_1+2}\,\mu^{-1}\right]$$

$$k(L_1 2 L_1 {-}2) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\ \frac{1}{2}\ \sqrt{\frac{3}{5}}\ \sqrt{\frac{L_1(L_1-1)}{(2L_1+1)(2L_1-1)}}\ \left[\ 1 + \frac{L_1+1}{L_1-1}\,\mu^{-1}\right]$$

with

$$\mu^{-1} = \frac{2j_1(j_1+1)}{2j_1(j_1+1) - L_1(L_1+1)}$$

Table VII. The canonical decay coefficients for the usual one amplitude decays.

(a) $j_1 \to \frac{1}{2}\ 0$ with parity violation

$$H(L_1 L_2 M_2) = \sqrt{\frac{2L_1+1}{4\pi}} < j_1\ \tfrac{1}{2} | j_1\ \tfrac{1}{2}\ L_1 0 > h(L_1 L_2 M_2)$$

$$h(L_1 00) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2} + \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\ \gamma'$$

$$h(L_1 10) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1-(-1)^{L_1}}{2} + \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\ \gamma' \right)$$

$$h(L_1 1 \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\ \frac{2j_1+1}{\sqrt{L_1(L_1+1)}}\ (\alpha' \mp i\ \beta')$$

(b) $j_1^{\epsilon_1} \to 1^{\epsilon_2}\ 0^{\epsilon_3}$ $\qquad \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = (-1)^{j_1+1}$

$$H(L_1 L_2 M_2) = \sqrt{\frac{2L_1+1}{4\pi}} < j_1\ 1 | j_1\ 1 L_1 0 > h(L_1 L_2 M_2)$$

$$h(L_1 00) = \frac{1+(-)^{L_1}}{2} \left(\frac{1+\mu^{-1}}{2} - \frac{1-\mu^{-1}}{2}\ \gamma' \right)$$

$$h(L_1 10) = \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1-\gamma'}{2}$$

$$h(L_1 1 \pm 1) = \frac{1}{2}\ \sqrt{\frac{j_1(j_1+1)}{L_1(L_1+1)}} \left[\frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\ \alpha' \pm \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\ (\mu^{-1}-1)\ i\beta' \right]$$

$$h(L_1 20) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\ \frac{1}{\sqrt{10}} \left(\frac{1-2\mu^{-1}}{2} - \frac{1+2\mu^{-1}}{2}\ \gamma' \right)$$

$$h(L_1 2 \pm 1) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\ \sqrt{\frac{j_1(j_1+1)}{L_1(L_1+1)}} \left[\frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\ (\mu^{-1}-1)\ \alpha' \pm \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\ i\beta' \right]$$

$$h(L_1 2 \pm 2) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\ \frac{1}{2}\ \sqrt{\frac{L_1(L_1+1)}{(L_1-1)(L_1+2)}}\ \mu^{-1}\ \frac{1-\gamma'}{2}$$

with

$$\mu^{-1} = \frac{2j_1\ (j_1+1)}{2j_1(j_1+1) - L_1(L_1+1)}$$

Table VIII. The helicity decay coefficients for the usual two amplitudes decays.

Table IX. The canonical decay coefficients for the usual two amplitudes decays.

(a) $j_1 \to \frac{1}{2}\ 0$ with parity violation

$$K(L_1L_2L) = \sqrt{\frac{2L_1+1}{4\pi}} < j_1\ \tfrac{1}{2} | j_1\ \tfrac{1}{2}\ L_1\ 0 > k(L_1L_2L)$$

$$k(L_1 0 L_1) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2} + \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\gamma'$$

$$k(L_1 1 L_1) = \frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\ \frac{2j_1+1}{\sqrt{L_1(L_1+1)}}\ i\beta'$$

$$k(L_1 1 L_1+1) = \frac{-1}{\sqrt{3(L_1+1)(2L_1+1)}}\left\{\frac{1+(-1)^{L_1}}{2}(L_1+1)\gamma' + \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\left[L_1+1-(2j_1+1)\alpha'\right]\right\}$$

$$k(L_1 1 L_1-1) = \frac{1}{\sqrt{3L_1(2L_1+1)}}\left\{\frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\ L_1\gamma' + \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\left[L_1+(2j_1+1)\alpha'\right]\right\}$$

Continued

(b) $j_1^{\epsilon_1} \rightarrow 1^{\epsilon_2}\ 0^{\epsilon_3}$, $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = (-1)^{j_1+1}$

$$K(L_1L_2L) = \sqrt{\frac{2L_1+1}{4\pi}} < j_1\ 1 | j_1\ 1 L_1 0 > k(L_1L_2L)$$

$$k(L_1 0 L_1) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\left(\frac{1+\mu^{-1}}{2} - \frac{1-\mu^{-1}}{2}\gamma'\right)$$

$$k(L_1 1 L_1) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\sqrt{\frac{j_1(j_1+1)}{L_1(L_1+1)}}\ \frac{1-\mu^{-1}}{2}\, i\beta'$$

$$k(L_1 1 L_1+1) = \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\ \frac{1}{\sqrt{2(L_1+1)(2L_1+1)}}\left[\sqrt{j_1(j_1+1)}\alpha' - (L_1+1)\ \frac{1-\gamma'}{2}\right]$$

$$k(L_1 1 L_1-1) = \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\ \frac{1}{\sqrt{2L_1(2L_1+1)}}\left[\sqrt{j_1(j_1+1)}\alpha' + L_1\ \frac{1-\gamma'}{2}\right]$$

$$k(L_1 2 L_1) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\sqrt{\frac{L_1(L_1+1)}{(2L_1-1)(2L_1+3)}}\left[\frac{1-5\mu^{-1}}{2} + \frac{3\sqrt{j_1(j_1+1)}}{4(L_1+1)}(1-\mu^{-1})\alpha' + \frac{1-\mu^{-1}}{2}\gamma'\right]$$

$$k(L_1 2 L_1+1) = \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\sqrt{\frac{3}{10}}\sqrt{\frac{L_1+2}{2L_1+1}}\sqrt{\frac{j_1(j_1+1)}{L_1(L_1+1)}}\, i\beta'$$

$$k(L_1 2 L_1-1) = \frac{1-(-1)^{L_1}}{2}\left(-\sqrt{\frac{3}{10}}\right)\sqrt{\frac{L_1-1}{2L_1+1}}\sqrt{\frac{j_1(j_1+1)}{L_1(L_1+1)}}\, i\beta'$$

$$k(L_1 2 L_1+2) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{(L_1+1)(L_1+2)}{(2L_1+3)(2L_1+1)}}\left[\frac{1-\mu^{-1}}{2} - \frac{\mu^{-1}}{L_1+2} - \left(\frac{1+3\mu^{-1}}{2} - \frac{\mu^{-1}}{L_1+2}\right)\gamma' + \frac{2\sqrt{j_1(j_1+1)}}{L_1+1}(1-\mu^{-1})\alpha'\right]$$

$$k(L_1 2 L_1-2) = \frac{1+(-1)^{L_1}}{2}\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{L_1(L_1-1)}{(2L_1+1)(2L_1-1)}}\left[\frac{1-\mu^{-1}}{2} + \frac{\mu^{-1}}{L_1-1} - \left(\frac{1+3\mu^{-1}}{2} + \frac{\mu^{-1}}{L_1-1}\right)\gamma' + \frac{2\sqrt{j_1(j_1+1)}}{L_1}(\mu^{-1}-1)\ \alpha'\right]$$

with

$$\mu^{-1} = \frac{2j_1(j_1+1)}{2j_1(j_1+1) - L_1(L_1+1)}$$

Table IX. (Continued).

CHAPITRE HUITIEME

PRODUCTION DE RESONANCES BARYONIQUES

PAR INTERACTION ELECTROMAGNETIQUE OU FAIBLE

22 - PRODUCTION DE RESONANCES BARYONIQUES PAR INTERACTION ELECTROMAGNETIQUE OU FAIBLE

Dans ce chapitre qui ne comprend qu'une section, nous étudions la polarisation d'une résonance baryonique B^* de spin $s \geqslant 3/2$, produite par interaction électromagnétique ou faible sur des cibles de nucléons non polarisés. Les réactions considérées sont les suivantes :

$$\gamma + N \longrightarrow B^* \quad , \tag{1}$$

$$e^-(e^+) + N \longrightarrow e^-(e^+) + B^* \quad , \tag{2}$$

$$\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + N \longrightarrow \mu^-(\mu^+) + B^* \quad . \tag{3}$$

La première est appelée la photoproduction, la seconde l'électroproduction et la troisième la neutrino-production. La photoproduction et l'électroproduction sont régies par les interactions électromagnétiques, et la neutrino-production par les interactions faibles.

Ces réactions sont suivies par la désintégration de la résonance par interactions fortes en un baryon et un pion

$$B^* \longrightarrow B + \pi \tag{4}$$

La distribution angulaire de désintégration, dans ce cas indépendante de la dynamique, permet de mesurer la partie paire de la matrice densité de la résonance.

Les réactions globales de production d'un pion ont déjà été longuement étudiées et de nombreux modèles et analyses phénoménologiques ont été réalisés, voir par exemple [C.G.L.N.57],[Den.60],[Sal.64],[Be.Ve.65], [Adl.68],[Du.Ts.68],[Wal.69],[Bij.70],[Sc.VH.73].

Nous étudions les réactions (1), (2), (3) du point de vue purement cinématique. Nous calculons les éléments de matrice de l'opérateur de transition en fonction des facteurs de forme multipolaires contenant toute l'inconnue dynamique et nous en déduisons la matrice densité de la

résonance. Pour les réactions à deux corps (2) et (3) nous donnons une forme relativement simple des amplitudes et des observables en utilisant les facteurs de forme multipolaires du système de Breit et en définissant un paramètre $\varkappa$ qui caractérise la géométrie de l'ensemble des deux vertex. [Don.67]

22.1-Interaction courant × courant

Dans le cadre de l'électrodynamique quantique et de la théorie V-A des interactions faibles [Fe.Ge.58], les trois réactions (1),(2),(3) sont décrites par une interaction courant × courant, i.e. l'opérateur de transition se factorise en un produit de deux opérateurs quadrivectoriels

$$T = \underline{j} \cdot \underline{J} \qquad (5)$$

où l'opérateur $\underline{j}$ est connu, c'est le courant électromagnétique ou le courant leptonique faible tandis que le courant hadronique $\underline{J}$ n'est pas connu et dépend des interactions fortes. Il en résulte que chaque élément de matrice de l'opérateur de transition se factorise en un produit de deux fonctions de vertex quadrivectorielles, l'une connue, l'autre développée en facteurs de forme multipolaires suivant la technique exposée au chapitre troisième. Nous avons montré, alors, que les développements multipolaires sont beaucoup plus simples en hélicité, et dans la suite nous adopterons toujours cette quantification.

22.2-Photoproduction

Soient $\underline{q}$, $\underline{p}'$et $\underline{p}$ les impulsions du photon, du nucléon et de la résonance, elles vérifient évidemment

$$\underline{q} + \underline{p}' = \underline{p} \quad , \quad \underline{q}^2 = 0 \ , \ \underline{p}'^2 = M'^2 \quad , \quad \underline{p}^2 = M^2 \quad . \qquad (6)$$

Supposons fixée une tétrade $\{e\}$, associée au photon cf.(16-18), telle que les quadrivecteurs $\underline{e}$ et $\underline{e}_3$ appartiennent au 2-plan $(\underline{p},\underline{p}')$ et que les quadrivecteurs $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ lui soient orthogonaux

$$\underline{e}, \underline{e}_3 \in (\underline{p},\underline{p}') \quad , \qquad (7a)$$

$$\underline{e}_1\cdot\underline{p} = \underline{e}_1\cdot\underline{p}' = \underline{e}_2\cdot\underline{p} = \underline{e}_2\cdot\underline{p}' = 0 \qquad (7b)$$

Pour le nucléon et pour la résonance nous choisirons des tétrades d'hélicité, cf.8-5, dont les axes 1 et 2 sont identiques à ceux de la tétrade

$\{e\}$:

$$\{\underline{p}\}_3 = \underline{h} = N\{-,\hat{p}|\hat{p}',\hat{p}\},\ \{\underline{p}'\}_3 = \underline{h}' = N\{-,\hat{p}'|\hat{p}',\hat{p}\}\ , \tag{8a}$$

$$\{\underline{p}\}_1 = \{\underline{p}'\}_1 = \underline{e}_1\ ,\ \{\underline{p}\}_2 = \{\underline{p}'\}_2 = \underline{e}_2\ . \tag{8b}$$

Les trois tétrades $\{e\}$, $\{p\}$ et $\{p'\}$ ainsi définies sont deux à deux conjuguées.

Dans ce cas l'élément de matrice $\underline{j}_n$ du courant électromagnétique est simplement le quadrivecteur $\underline{e}_n$ qui décrit la polarisation circulaire du photon

$$\underline{j}_n = \underline{e}_n\ , \tag{9}$$

tandis que les fonctions de vertex du courant hadronique

$$\underline{J}(\{e\})^{\sigma}_{\theta} = \langle \{p\}\ \sigma\ |\ \underline{J}\ |\ \{p'\}\ \theta \rangle \tag{10}$$

ne dépendent plus que du choix de la tétrade $\{e\}$, puisque l'invariant $\underline{q}^2$ est fixé et qu'en hélicité la dépendance angulaire disparait. Il en résulte que les éléments de matrice de transition, définis à une phase globale près, sont les composantes sphériques des fonctions de vertex du courant hadronique

$$T(\{e\})^{\sigma}_{\theta_n} = -\ \underline{j}_n \cdot \underline{J}(\{e\})^{\sigma}_{\theta} = \left[J(\{e\})^{\sigma}_{\theta}\right]^1_n \tag{11}$$

A l'aide des développements multipolaires (11-28), en tenant compte de la parité ϵ de la résonance, on obtient l'expression des éléments de matrice de transition, a priori non nuls, en fonction des facteurs de forme multipolaires du courant hadronique

	$\epsilon = (-1)^{s+1/2}$
$\sqrt{8\pi}\ T(\{e\})^{\pm 3/2}_{\pm 1/2\ \pm 1} =$	$\mp\ (\sqrt{s-1/2}\ \mathcal{E}_\tau^{s+1/2} + \sqrt{s+3/2}\ \mathcal{M}_\tau^{s-1/2})$
$\sqrt{8\pi}\ T(\{e\})^{\mp 1/2}_{\pm 1/2\ \mp 1} =$	$\mp\ (\sqrt{s+3/2}\ \mathcal{E}_\tau^{s+1/2} - \sqrt{s-1/2}\ \mathcal{M}_\tau^{s-1/2})$
	$\epsilon = (-1)^{s-1/2}$
$\sqrt{8\pi}\ T(\{e\})^{\pm 3/2}_{\pm 1/2\ \pm 1} =$	$\sqrt{s+3/2}\ \mathcal{E}_\tau^{s-1/2} + \sqrt{s-1/2}\ \mathcal{M}_\tau^{s+1/2}$
$\sqrt{8\pi}\ T(\{e\})^{\mp 1/2}_{\pm 1/2\ \mp 1} =$	$\sqrt{s-1/2}\ \mathcal{E}_\tau^{s-1/2} - \sqrt{s+3/2}\ \mathcal{M}_\tau^{s+1/2}$

(12)

Les facteurs de forme $\mathcal{E}_\tau^{s\pm1/2}$ et $\mathcal{M}_\tau^{s\pm1/2}$ sont des nombres puisque, étant transverses ils ne dépendent pas du choix de $\underline{e}$ dans le 2-plan $(\underline{p}.\underline{p}')$ et que le transfert $\underline{q}^2$ est nul.

Si le nucléon initial n'est pas polarisé, et si l'état de polarisation du photon est décrit par la matrice densité ρ_i les éléments de la matrice densité non normalisée de la résonance sont

$$\tilde{\rho}^{\sigma}_{\sigma'} = \frac{1}{2} \sum_{\theta} T^{\sigma}_{\theta\, n} \rho_i{}^{n}_{n'} T^{\sigma'}_{\theta\, n'}{}^{*} \qquad (13)$$

En effectuant la sommation on obtient les expressions suivantes pour les éléments non nuls

$$\tilde{\rho}^{\pm 3/2}_{\pm 3/2} = \frac{1}{2} \rho_i{}^{\pm}_{\pm} \left| T^{\pm 3/2}_{\pm 1/2\, \pm} \right|^2 \qquad (14a)$$

$$\tilde{\rho}^{\pm 1/2}_{\pm 1/2} = \frac{1}{2} \rho_i{}^{\pm}_{\pm} \left| T^{\pm 1/2}_{\mp 1/2\, \pm} \right|^2 \qquad (14b)$$

$$\tilde{\rho}^{3/2}_{-1/2} = \frac{1}{2} \rho_i{}^{+}_{-} T^{3/2}_{1/2\, +} T^{-1/2}_{+1/2\, -}{}^{*} \qquad (14c)$$

$$\tilde{\rho}^{1/2}_{-3/2} = \frac{1}{2} \rho_i{}^{+}_{-} T^{1/2}_{-1/2\, +} T^{-3/2}_{-1/2\, -}{}^{*} \qquad (14d)$$

Donc quel que soit le spin de la résonance, la forme la plus générale de sa matrice densité est un noyau central 4 × 4 bordé de zéros présentant une structure en damier,

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} x & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & x \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & x \end{pmatrix} \qquad (15)$$

où les x représentent les éléments non nuls. Si le photon n'est pas polarisé (a), ou s'il est polarisé circulairement à droite (b), ou à gauche (c), la matrice densité de la résonance prend une forme encore plus particulière

$$\rho_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\rho} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \qquad (16a)$$

$$\rho_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\rho} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (16b)$$

$$\rho_i = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \tilde{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \qquad (16c)$$

La trace de $\tilde{\rho}$ est

$$\mathrm{tr}\,\tilde{\rho} = \frac{1}{2}\left(|T^{+3/2}_{+\frac{1}{2}+}|^2 + |T^{-\frac{1}{2}}_{+\frac{1}{2}-}|^2\right) \qquad (17a)$$

soit, en fonction des facteurs de forme multipolaires, quels que soient le spin et la parité de la résonance,

$$\mathrm{tr}\,\tilde{\rho} = \frac{2s+1}{16\pi}\left(|\mathcal{E}|^2 + |\mathcal{M}|^2\right) \qquad (17b)$$

où pour alléger la notation nous avons enlevé les indices des facteurs de forme puisqu'il n'y a aucune ambiguité.

Les éléments de la matrice normalisée, $\rho = \tilde{\rho}/\mathrm{tr}\,\tilde{\rho}$, s'expriment en fonction des facteurs de forme multipolaires suivant :

$$\rho^{\pm 3/2}_{\pm 3/2} = \frac{1}{2}\,\rho_{i\,\pm}^{\pm}\;\frac{\alpha^2|\mathcal{E}|^2 + \beta^2|\mathcal{M}|^2 + 2\alpha\beta\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{E}^*\mathcal{M})}{|\mathcal{E}|^2 + |\mathcal{M}|^2} \qquad (18a)$$

$$\rho^{\pm\frac{1}{2}}_{(\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\rho_{i\,\pm}^{\pm}\;\frac{\beta^2|\mathcal{E}|^2 + \alpha^2|\mathcal{M}|^2 - 2\alpha\beta\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{E}^*\mathcal{M})}{|\mathcal{E}|^2 + |\mathcal{M}|^2} \qquad (18b)$$

$$\rho^{3/2}_{\ \ \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\rho_{i\,-}^{+}\;\frac{\alpha\beta(|\mathcal{E}|^2 - |\mathcal{M}|^2) + (\beta^2-\alpha^2)\mathrm{Re}(\mathcal{E}^*\mathcal{M}) + i\,\mathrm{Im}(\mathcal{E}^*\mathcal{M})}{|\mathcal{E}|^2 + |\mathcal{M}|^2} \qquad (18c)$$

$$\rho^{-\frac{1}{2}}_{\ \ -3/2} = \frac{1}{2}\,\rho_{i\,-}^{+}\;\frac{\alpha\beta(|\mathcal{E}|^2 - |\mathcal{M}|^2) + (\beta^2-\alpha^2)\,\mathrm{Re}(\mathcal{E}^*\mathcal{M}) - i\,\mathrm{Im}(\mathcal{E}^*\mathcal{M})}{|\mathcal{E}|^2 + |\mathcal{M}|^2} \qquad (18d)$$

où l'on a posé

$$\alpha = \sqrt{\frac{s+\frac{1}{2}-\epsilon}{2s+1}} \quad , \quad \beta = \sqrt{\frac{s+\frac{1}{2}+\epsilon}{2s+1}} \qquad (19)$$

Si on impose l'invariance par renversement du temps les facteurs de forme multipolaires sont réels, et les relations précédentes deviennent, dans le cas $s = 3/2$, $\epsilon = +1$,

$$\rho^{\pm 3/2}_{\pm 3/2} = \frac{\mathcal{E}^2 + 3\,\mathcal{M}^2 + 2\sqrt{3}\,\mathcal{E}\mathcal{M}}{2(\mathcal{E}^2 + \mathcal{M}^2)}\;\rho_{i\,\pm}^{\pm} \qquad (20a)$$

$$\rho^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}} = \frac{3\,\mathcal{E}^2 + \mathcal{M}^2 - 2\sqrt{3}\,\mathcal{E}\mathcal{M}}{2(\mathcal{E}^2 + \mathcal{M}^2)}\;\rho_{i\,\pm}^{\pm} \qquad (20b)$$

$$\rho^{3/2}_{\frac{1}{2}} = \rho^{-\frac{1}{2}}_{-3/2} = \frac{\sqrt{3}\,(\mathcal{E}^2 - \mathcal{M}^2) + 2\mathcal{E}\mathcal{M}}{2(\mathcal{E}^2 + \mathcal{M}^2)}\ \rho_i^+ - \qquad (20c)$$

22.3-Cinématique des réactions à deux corps

Considérons une réaction à deux corps, où par commodité nous appelons leptons les particules d'impulsions $\underline{k}'$, $\underline{k}$, et baryons celles d'impulsions $\underline{p}'$,$\underline{p}$

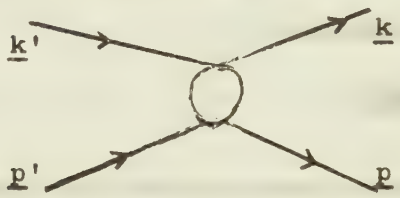

Fig. 1

Les masses des particules sont notées m', m, M',M,

$$\underline{k}'^2 = m'^2\ ,\ \underline{k}^2 = m^2\ ,\ \underline{p}'^2 = M'^2\ ,\ \underline{p}^2 = M^2\ . \qquad (21)$$

La conservation de l'énergie impulsion s'écrit

$$\underline{k}' + \underline{p}' = \underline{k} + \underline{p}\ . \qquad (22)$$

Le transfert d'impulsion est défini par

$$\underline{q} = \underline{p} - \underline{p}' = \underline{k}' - \underline{k} \qquad (23)$$

et son carré est toujours négatif

$$\underline{q}^2 = M^2 + M'^2 - 2\,\underline{p}.\underline{p}' = m^2 + m'^2 - 2\underline{k}.\underline{k}' \qquad (24)$$

Nous notons W l'énergie totale du système

$$W = m'^2 + M'^2 + 2\,\underline{k}'.\underline{p}' = m^2 + M^2 + 2\,\underline{k}.\underline{p}\ . \qquad (25)$$

A priori, les quatre quadrivecteurs $\underline{k}'$, $\underline{p}'$, $\underline{k}$, $\underline{p}$ définissent un 3-plan dont nous construisons la normale $\underline{n}$ par

$$\underline{n} = C\ \{-,k',p',k\}\quad ,\quad C = \left[\ -\ \{k',p',k|k',p',k\}\right]^{-\frac{1}{2}}\ , \qquad (26)$$

et la condition

$$\{k',p',k\,|\,k',p',k\} \leqslant 0 \qquad (27)$$

détermine la région physique de la réaction. A la frontière de cette régio le transfert s'exprime en fonction de l'énergie totale par :

$$\underline{q}^2 = -\frac{1}{2W}\{W^2 - (m'^2+m^2+M'^2+M^2)W+(m'-M')^2(m-M)^2$$
$$\pm\sqrt{\lambda(W,m'^2,M'^2)\ \lambda(W,m^2,M^2)}\ \}\ . \qquad (28)$$

Pour étudier la cinématique de cette réaction, il est utile de

construire deux quadrivecteurs $\underline{K}$ et $\underline{P}$ de genre temps, appartenant respectivement aux 2-plans $(\underline{k}',\underline{k})$ et $(\underline{p}',\underline{p})$, orthogonaux au transfert $\underline{q}$, unitaires et tels que leur produit scalaire soit positif

$$\underline{K} = \widetilde{N}\,\{-,Q|k',k\} \quad , \quad \widetilde{N} = \{k',k|k,k'\}^{-1/2} \quad , \tag{29a}$$

$$\underline{P} = N\,\{-,Q|p',p\} \quad , \quad N = \{p',p|p,p'\}^{-1/2} \quad . \tag{29b}$$

avec

$$\underline{Q} = -\,\underline{q}/\sqrt{-q^2} \quad . \tag{29c}$$

Ces quadrivecteurs $\underline{K}$ et $\underline{P}$ caractérisent respectivement le système de Breit des vertex leptoniques et baryoniques. A l'aide des quadrivecteurs $\underline{n}$, $\underline{Q}$, et $\underline{K}$ ou $\underline{P}$ nous définissons une tétrade associée à chaque vertex

$$\{K\} = \{\underline{K},\ \underline{\widetilde{t}},\underline{n},\underline{Q}\} \quad , \quad \{P\} = \{\underline{P},\underline{t},\underline{n},\underline{Q}\} \quad . \tag{30}$$

avec

$$\underline{\widetilde{t}} = \{-,K,n,Q\} = \widetilde{N}C\,\{-,k,k'|k',p',k\} \quad , \tag{31a}$$

$$\underline{t} = \{-,P,n,Q\} = NC\,\{-,p,p'|k',p',k\} \quad . \tag{31b}$$

Les tétrades $\{K\}$ et $\{P\}$ sont conjuguées, c'est-à-dire, [Don.67],

$$\underline{K} = \mathrm{ch}\,\varkappa\,\underline{P} + \mathrm{sh}\,\varkappa\,\underline{t} \tag{32a}$$

$$\underline{\widetilde{t}} = \mathrm{sh}\,\varkappa\,\underline{P} + \mathrm{ch}\,\varkappa\,\underline{t} \tag{32b}$$

et on déduit des définitions des quadrivecteurs $\underline{K}$, $\underline{\widetilde{t}}$,$\underline{P}$,$\underline{T}$,

$$\mathrm{ch}\,\varkappa = \frac{\{k,k'|p',p\}}{\sqrt{\{k,k'|k,k'\}\{p,p'|p,p'\}}} \tag{33a}$$

$$\mathrm{sh}\,\varkappa = -\sqrt{\frac{q^2\{k',p',k|k',p',k\}}{\{k,k'|k,k'\}\{p,p'|p,p'\}}} \tag{33b}$$

Quand l'opérateur de transition se factorise en un produit de deux courants leptonique et baryonique, ch $\varkappa$ et sh $\varkappa$ sont les seules variables cinématiques qui interviennent en plus du transfert $\underline{q}^2$.

A la frontière de la région physique , les quadrivecteurs $\underline{k}'$,$\underline{p}'$,$\underline{k}$, $\underline{p}$ appartiennent au même 2-plan, et dans ce cas les quadrivecteurs $\underline{n}$, $\underline{t}$ et $\underline{\widetilde{t}}$ ne sont plus définis tandis que $\underline{K}$ et $\underline{P}$ coincident, cela correspond à

$$\mathrm{ch}\,\varkappa = 1 \quad , \quad \mathrm{sh}\,\varkappa = 0 \quad . \tag{34}$$

Pour repérer la polarisation des particules nous utilisons les tétrades d'hélicité suivantes

$$\{\underline{k}'\} = \{\hat{\underline{k}}', \tilde{\underline{t}}, \underline{n}, \tilde{\underline{h}}'\} \quad , \qquad \tilde{\underline{h}}' = \tilde{N}\{-, \hat{k}' | k', k\} \quad , \tag{35a}$$

$$\{\underline{k}\} = \{\hat{\underline{k}}, \tilde{\underline{t}}, \underline{n}, \tilde{\underline{h}}\} \quad , \qquad \tilde{\underline{h}} = \tilde{N}\{-, \hat{k} | k', k\} \quad , \tag{35b}$$

$$\{\underline{p}'\} = \{\hat{\underline{p}}', \underline{t}, \underline{n}, \underline{h}'\} \quad , \qquad \underline{h}' = N\{-, \hat{p}' | p', p\} \quad , \tag{35c}$$

$$\{\underline{p}\} = \{\hat{\underline{p}}, \underline{t}, \underline{n}, \underline{h}\} \quad , \qquad \underline{h} = N\{-, \hat{p} | p', p\} \quad . \tag{35d}$$

Il faut noter que les tétrades $\{K\}, \{k'\}, \{k\}$ d'une part et $\{P\}, \{p'\}, \{p\}$ d'autre part sont deux à deux conjuguées. On peut ainsi définir un paramètre x tel que

$$\underline{P} = \text{ch } x\, \underline{p} + \text{sh } x\, \underline{h} \quad , \tag{36a}$$

$$\underline{Q} = \text{sh } x\, \underline{p} + \text{ch } x\, \underline{h} \quad . \tag{36b}$$

Les valeurs de ch x et sh x se déduisent des définitions des quadrivecteurs, $\underline{h}$, $\underline{P}$, $\underline{Q}$

$$\text{ch } x = \frac{1}{M\sqrt{-q^2}} * \frac{1}{N} \quad , \qquad \text{sh } x = \frac{1}{M\sqrt{-q^2}} \, (pp' - M^2) \tag{37}$$

Il faut noter si les deux leptons ont une masse nulle le transfert q^2 peut être nul et dans ce cas le choix du système de Breit introduit des singularités cinématiques en $\frac{1}{\sqrt{-q^2}}$.

22.4-Electroproduction

Au premier ordre des perturbations, la réaction d'électroproduction est décrite par le graphe

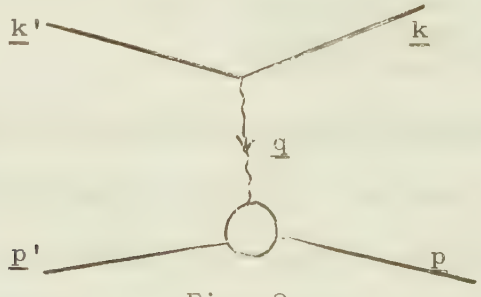

Fig. 2

où $\underline{k}$ et $\underline{k}'$ sont les impulsions des électrons initial et final

$$\underline{k}^2 = \underline{k}'^2 = m^2 \quad . \tag{38}$$

L'opérateur de transition peut alors se mettre sous la forme

$$T = \frac{1}{q^2} \; \underline{j} \cdot \underline{J} \tag{39}$$

où $\frac{1}{q^2}$ est le propagateur du photon virtuel échangé, $\underline{j}$ et $\underline{J}$ les courants

électronique et hadronique électromagnétiques.

Pour les électrons, les fonctions de vertex du courant électronique s'écrivent, [Bj.Dr.64],

$$\underline{j}^{\theta}{}_{\theta'} = \tilde{u}^{\theta}(\{k\}) i\underline{\gamma}\, u_{\theta'}(\{k'\}) = \mathrm{tr}\, u_{\theta'}(\{k'\}) \otimes \tilde{u}^{\theta}(\{k\}) \quad , \qquad (40)$$

soit en utilisant l'identité (16-13)

$$\underline{j}^{\theta}{}_{\theta'} = \frac{1}{\sqrt{2(\underline{k}.\underline{k}'+m^2)}}\ \frac{1}{4}\ \mathrm{tr}\ \{(\not{k}'+m)[\delta^{\theta}{}_{\theta'}+i\gamma^5 \not{s}_i(\zeta^i)^{\theta}{}_{\theta'}](\not{k}+m) i\underline{\gamma}\} \qquad (41)$$

où les quadrivecteurs $\underline{S}_i$ (i = 1,2,3) forment la partie de genre espace d'une tétrade adaptée à $\underline{k}$. En effectuant la trace, comme en (17-8b), on obtient

$$\underline{j}^{\theta}{}_{\theta'}(e^-) = \frac{m}{\sqrt{2(\underline{k}.\underline{k}'+m^2)}}\ \{(\underline{k}+\underline{k}')\delta^{\theta}{}_{\theta'} - i\,\{\underline{k},-,\underline{k}',\underline{S}_i\}(\zeta^i)^{\theta}{}_{\theta'}\} \qquad (42)$$

où e^- rappelle qu'il s'agit d'électrons.

Pour les anti-électrons le courant s'écrit "en remontant la ligne" des antiparticules, [Bj.Dr.64], soit

$$\underline{j}^{\theta}{}_{\theta'}(e^+) = \tilde{v}(\{k'\})^{\theta'} i\underline{\gamma}\, \underline{v}(\{k\})_{\theta} = \mathrm{tr}\, v(\{k\})_{\theta} \otimes \tilde{v}(\{k'\})^{\theta'}\, i\underline{\gamma} \quad , \qquad (43)$$

où, comme pour les électrons, nous plaçons l'indice magnétique de l'anti-électron initial en position inférieure et celui de l'anti-électron en position supérieure. En généralisant l'identité (16-13) aux anti-particules, on obtient

$$\underline{j}^{\theta}{}_{\theta'}(e^+) = \frac{1}{\sqrt{2(\underline{k}.\underline{k}'+m^2)}}\ \frac{1}{4}\ \mathrm{tr}\ \{(\not{k}-m)[\delta^{\theta'}{}_{\theta}+i\gamma^5 \not{s}_i(\zeta^{i*})^{\theta'}{}_{\theta}](\not{k}'-m) i\underline{\gamma}\} . \qquad (44)$$

L'hermiticité des matrices de Pauli et le fait que les tétrades $\{k\}$ et $\{k'\}$ soient conjuguées permettent de réécrire l'expression précédente sous la forme

$$\underline{j}^{\theta}{}_{\theta'}(e^+) = \frac{1}{\sqrt{2(\underline{k}.\underline{k}'+m^2)}}\ \frac{1}{4}\ \mathrm{tr}\ \{(\not{k}-m)[\delta^{\theta}{}_{\theta'}+i\gamma^5 \not{s}_i(\zeta^i)^{\theta}{}_{\theta'}](\not{k}'-m) i\underline{\gamma}\} . \qquad (45)$$

Le calcul de trace donne simplement

$$\underline{j}^{\theta}{}_{\theta'}(e^+) = -\,\underline{j}^{\theta}{}_{\theta'}(e^-) \quad . \qquad (46)$$

Cette différence de signe n'intervenant pas dans le calcul des observables nous supposerons dans la suite ces deux courants identiques.

En utilisant les tétrades d'hélicité (35a,b), et en remarquant que dans le cas m = m' le quadrivecteur $\underline{K}$ devient

$$\underline{K} = - \frac{\underline{k}+\underline{k}'}{\sqrt{2(\underline{k}.\underline{k}'+m^2)}} \quad , \tag{47}$$

on obtient

$$\underline{j}^{\theta}{}_{\theta'} = m\, \underline{K}\, \delta^{\theta}{}_{\theta'} - \sqrt{-q^2}\, \frac{i}{\sqrt{2}} \left[\underline{n} (\tau_1)^{\theta}{}_{\theta'} - \underline{\tilde{t}} (\tau_2)^{\theta}{}_{\theta'} \right] \tag{48}$$

Le courant électromagnétique hadronique est conservé, et nous avons vu au §11-5 que dans le cas $q^2 < 0$, il était intéressant de se placer dans le système de Breit du vertex hadronique de façon à annuler un facteur de forme multipolaire. Nous choisissons donc la tétrade $\{P\}$, définie en (30) comme tétrade de référence

$$\{e\} = \{P\} \tag{49}$$

En considérant l'opérateur de transition T comme une matrice 2 × 2 dans l'espace de polarisation des électrons, nous pouvons l'écrire en fonction des composantes sphériques du courant hadronique dans ce système

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{q^2} \{ & J^0_0 \left[m \operatorname{ch} \varkappa \, \mathbf{1} + \sqrt{\frac{-q^2}{2}} \operatorname{sh} \varkappa \, i \, \tau_2 \right] \\ & + J^1_+ \left[\frac{m}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \varkappa \, \mathbf{1} - \sqrt{\frac{-q^2}{2}} \, (\pm \tau^1 - \operatorname{ch} \varkappa \, i \, \tau^2) \right] \\ & + J^1_- \left[- \frac{m}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \varkappa \, 1 - \sqrt{\frac{-q^2}{2}} (\pm \tau^1 + \operatorname{ch} \varkappa \, i \, \tau^2) \right] \} \end{aligned} \tag{50}$$

Selon la parité de la résonance, les seules composantes sphériques non nulles des fonctions de vertex du courant hadronique sont, cf.11-28,

$\epsilon = (-1)^{s+1/2}$

$$\left[J^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}\right]^{0}_{0} = \mp A = \mp \sqrt{\frac{2s+1}{8\pi}}\ \xi^{s+1/2}_{t}$$

$$\left[J^{\pm 3/2}_{\pm 1/2}\right]^{1}_{\pm} = \mp B = \frac{\mp 1}{\sqrt{8\pi}}\left(\sqrt{s-1/2}\ \xi^{s+1/2}_{r} + \sqrt{s+3/2}\ m^{s-1/2}_{r}\right) \qquad (51a)$$

$$\left[J^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}\right]^{1}_{\mp} = \mp C = \frac{\mp 1}{\sqrt{8\pi}}\left(\sqrt{s+3/2}\ \xi^{s+1/2} - \sqrt{s-1/2}\ m^{s-1/2}\right)$$

$\epsilon = (-1)^{s-1/2}$

$$\left[J^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}\right]^{0}_{0} = A' = \sqrt{\frac{2s+1}{8\pi}}\ \xi^{s-1/2}_{t}$$

$$\left[J^{\pm 3/2}_{\pm 1/2}\right]^{1}_{\pm} = B' = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left(\sqrt{s+3/2}\ \xi^{s-1/2}_{r} + \sqrt{s-1/2}\ m^{s+1/2}\right) \qquad (51b)$$

$$\left[J^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}\right]^{1}_{\mp} = C' = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left(\sqrt{s-1/2}\ \xi^{s-1/2}_{r} - \sqrt{s+3/2}\ m^{s+1/2}\right)$$

Les éléments de matrice de transition s'expriment alors en fonction de ces combinaisons linéaires A, B, C de facteurs de forme multipolaires. Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant où chaque ligne définit 4 éléments de matrice correspondant aux changements de signe des indices magnétiques des baryons et des leptons.

	$\epsilon = (-1)^{s+1/2}$	$\epsilon = (-1)^{s-1/2}$
$T^{\pm 1/2\ \epsilon}_{\pm 1/2\ \epsilon} = \frac{m\ ch\chi}{q^2} \times$	$\mp A$	A'
$T^{\pm 1/2\ -\epsilon}_{\pm 1/2\ \epsilon} = \epsilon \frac{sh\ \chi}{\sqrt{-2q^2}} \times$	$\mp A$	A'
$T^{\pm 3/2\ \epsilon}_{\pm 1/2\ \epsilon} = \frac{m\ sh\ \chi}{q^2\sqrt{2}} \times$	$- B$	$\pm B'$
$T^{\pm 3/2\ -\epsilon}_{\pm 1/2\ \epsilon} = -\frac{1}{\sqrt{-q^2}} \frac{1 \pm \epsilon\ ch\ \chi}{2} \times$	$\pm B$	$- B'$
$T^{\mp 1/2\ \epsilon}_{\pm 1/2\ \epsilon} = \frac{m\ sh\ \chi}{q^2\sqrt{2}} \times$	C	$\mp C'$
$T^{\mp 1/2\ -\epsilon}_{\pm 1/2\ \epsilon} = -\frac{1}{\sqrt{-q^2}} \frac{1 \mp \epsilon\ ch\ \chi}{2} \times$	$\pm C$	$- C'$

(52)

Ces éléments de matrice permettent de déterminer toutes les observables de la réaction. Dans le cas où l'état initial n'est pas polarisé,

alors l'électron ou l'anti-électron final n'est pas non plus polarisé et les éléments de la matrice densité non normalisée de la résonance sont donnés par

$$\tilde{\rho}^{\sigma}_{\sigma'} = \frac{1}{4} \sum_{\theta \epsilon \alpha} T^{\sigma\ \epsilon}_{\theta\ \alpha}\ T^{\sigma'\ \epsilon\ *}_{\theta\ \alpha} \quad . \tag{53}$$

La réaction est B-symétrique, en hélicité cela se traduit sur cett matrice densité par la condition,[Min.71]

$$\rho^{\sigma}_{\sigma'} = (-1)^{\sigma-\sigma'}\ \rho^{-\sigma}_{-\sigma'} = (-1)^{\sigma-\sigma'}\ \rho^{-\sigma'\ *}_{-\sigma} \tag{54}$$

Si en outre on impose l'invariance par renversement du temps, les facteurs de forme et donc la matrice densité sont réels, et la condition précédente devient

$$\rho^{\sigma}_{\sigma'} = (-1)^{\sigma-\sigma'}\ \rho^{-\sigma'}_{-\sigma} \tag{55}$$

En utilisant (52) et (53) on peut exprimer les éléments de matrice densité en fonction des combinaisons de facteurs de forme définies en (51

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}^{3/2}_{3/2} &= \frac{1}{4q^4}\left(m^2\,\mathrm{sh}^2\,\varkappa - q^2\,\frac{1+\mathrm{ch}^2\,\varkappa}{2}\right)|B|^2 \\
\tilde{\rho}^{1/2}_{1/2} &= \frac{1}{4q^4}\left\{(2m^2\mathrm{ch}^2\,\varkappa - q^2\mathrm{sh}^2\,\varkappa)|A|^2 + \left(m^2\mathrm{sh}^2\,\varkappa - q^2\,\frac{1+\mathrm{ch}^2\,\varkappa}{2}\right)|C|^2\right\} \\
\tilde{\rho}^{3/2}_{1/2} &= \frac{1}{4\sqrt{2}q^4}(2m^2 - q^2)\,\mathrm{ch}\,\varkappa\,\mathrm{sh}\,\varkappa\,A^*B \\
\tilde{\rho}^{1/2}_{-1/2} &= \frac{1}{4\sqrt{2}q^4}(2m^2 - q^2)\,\mathrm{ch}\,\varkappa\,\mathrm{sh}\,\varkappa\,(A^*C - AC^*) \\
\tilde{\rho}^{3/2}_{-1/2} &= -\frac{1}{8q^4}(2m^2 - q^2)\,\mathrm{sh}^2\,\varkappa\,BC^*
\end{aligned} \tag{56}$$

où ces relations écrites pour $\epsilon = (-1)^{s+1/2}$ sont valables dans les deux cas de parité. Pour $\epsilon = (-1)^{s-1/2}$ il suffit de remplacer dans les équations précédentes A,B,C par A',B',C'.

Quel que soit le spin de la résonance, la forme de cette matrice est un noyau central 4 x 4 à "coins nuls" bordé de zéro,i.e.

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} x & x & x & 0 \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{pmatrix} \tag{57}$$

En outre si on impose le renversement du temps les deux autres éléments de la deuxième diagonale sont nuls

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} x & x & x & 0 \\ x & x & 0 & x \\ x & 0 & x & x \\ 0 & x & x & x \end{pmatrix} \qquad (58)$$

La trace de cette matrice densité est

$$\mathrm{tr}\,\tilde{\rho} = \frac{1}{2q^4}\left\{(2m^2\mathrm{ch}^2\,\chi - q^2\mathrm{sh}^2\,\chi)|A|^2 + (m^2\mathrm{sh}^2\,\chi - q^2\,\frac{1+\mathrm{ch}^2\,\chi}{2})(|B|^2+|C|^2)\right\} \qquad (59)$$

elle s'exprime aussi simplement en fonction des facteurs de forme multipolaires dans les deux cas de parité

$$\mathrm{tr}\,\tilde{\rho} = \frac{2s+1}{32\pi q^4}\left\{(2m^2\mathrm{ch}^2\,\chi - q^2\mathrm{sh}^2\,\chi)|\mathcal{E}_t|^2 + (m^2\mathrm{sh}^2\,\chi - q^2\,\frac{1+\mathrm{ch}^2\,\chi}{2})(|\mathcal{E}_\ell|^2+|\mathcal{M}_\ell|^2)\right\} \qquad (60)$$

Au bord de la région physique, $\mathrm{ch}\,\chi = 1$, $\mathrm{sh}\,\chi = 0$, en régularisant le facteur de forme $A = \tilde{A}\sqrt{-q^2}$, à cause de la conservation du courant, l'équation (59) devient

$$\mathrm{tr}\,\tilde{\rho} = -\frac{1}{2q^2}(2m^2|\tilde{A}|^2 + |B|^2 + |C|^2) \qquad (61)$$

Donc si on fait tendre la masse de l'électron vers zéro, cette expression devient

$$\mathrm{tr}\,\tilde{\rho} = -\frac{1}{2q^2}(|B|^2 + |C|^2) \qquad (62)$$

De même, les seuls éléments de matrice densité de la résonance non nuls au bord de la région physique sont,

$$\tilde{\rho}^{3/2}_{\ 3/2} = -\frac{1}{4q^4}|B|^2 \qquad (63a)$$

$$\tilde{\rho}^{1/2}_{\ 1/2} = -\frac{1}{4q^4}(2m^2|\tilde{A}|^2 + |C|^2) \qquad (63b)$$

Donc à la limite où la masse de l'électron est nulle la matrice densité normalisée de la résonance est analogue à celle obtenue pour la photoproduction :

$$\rho = \frac{1}{2(|B|^2+|C|^2)} \begin{pmatrix} |B|^2 & & 0 \\ & |C|^2 & \\ 0 & & |C|^2 \\ & & & |B|^2 \end{pmatrix} \qquad (64)$$

22.5-Neutrino production

Soient $\underline{k}'$ et $\underline{k}$ respectivement les impulsions du neutrino initial e du lepton final dont la masse est notée m :

$$\underline{k}'^2 = 0 \quad , \quad \underline{k}^2 = m^2 \qquad (65)$$

Dans le cadre de la théorie V-A des interactions faibles qui postule une interaction ponctuelle, la réaction peut être représentée par le graphe, [M.R.R.69] ,

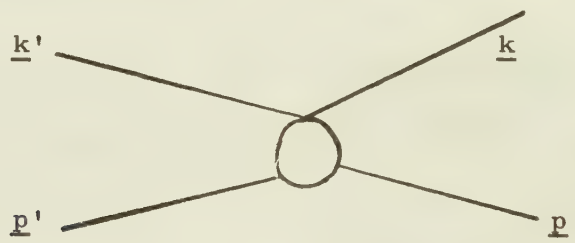

Fig. 3

et l'élément de matrice de transition se factorise sous la forme

$$T = \underline{j}\cdot\underline{J} \qquad (66)$$

où $\underline{j}$ et $\underline{J}$ sont les courants leptonique et hadronique faibles qui violent la parité, i.e. ils comportent une partie vectorielle et une partie axiale. Les fonctions de vertex du courant leptonique sont

$$\underline{j}(-1)^\epsilon = \tilde{u}(\{k\})^\epsilon \; i\,\underline{\gamma}\; u(k',-1) = tr\; u(k',-1) \otimes \tilde{u}(\{k\})^\epsilon\, i\underline{\gamma} \qquad (67)$$

où u(k',-1) décrit le neutrino d'hélicité -1. Pour déterminer ce courant nous allons calculer le produit tensoriel de spineurs selon la méthode de L. Michel [Mic.64]. A une phase globale près, ce produit tensoriel de spineurs s'écrit :

$$u(k',-1) \otimes \tilde{u}(\{k\})^\epsilon = \frac{u(k',-1)\otimes \tilde{u}(k',-1)\; u(\{k\})_- \otimes \tilde{u}(\{k\})^\epsilon}{|\tilde{u}(k',-1)\; u(\{k\})_-|} \qquad (68)$$

où pour simplifier, nous portons en indice des spineurs le signe du nombre quantique magnétique. Il faut que le dénominateur soit non nul,

calculons son module

$$\left|\tilde{u}(k',\xi)u(\{k\})_-\right|^2 = \mathrm{tr}\left[u(k',-1)\otimes\tilde{u}(k',-1)u(\{k\})_-\otimes\tilde{u}(\{k\})^-\right]$$
$$= \frac{1}{8}\,\mathrm{tr}\left[(1-i\gamma^5)\not{k}'(1-i\gamma^5\not{s}_3)(\not{k}+m)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\underline{k}'.\underline{k} - m\,\underline{k}'.\underline{s}_3\right] \qquad (69)$$

où nous avons utilisé les formules de Bouchiat-Michel pour les neutrinos, et les particules de masse non nulle, cf. §16-2. Pour que cette quantité ne soit jamais nulle, il faut

$$\underline{s}_3 \neq \hat{\underline{k}} - \frac{1}{\underline{k}.\underline{k}'}\,\underline{k}' = -\,\tilde{\underline{h}} \quad . \qquad (70)$$

Le produit tensoriel de spineurs du courant leptonique est alors

$$\boxed{u(k',-1)\otimes\tilde{u}(\{k\})^\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2(\underline{k}'.\underline{k}-m\underline{k}'.\underline{s}_3)}}\,\frac{1}{4}\,(1-i\gamma^5)\not{k}'\left[\delta^\epsilon_- + i\gamma^5\not{s}_i(\tau^i)^\epsilon_-\right](\not{k}+m)} \qquad (71)$$

En reportant cette expression dans la formule (67), et en effectuant la trace, on obtient l'expression du courant faible leptonique

$$\underline{j}(-1)^\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2\underline{k}'.(\underline{k}-m\underline{s}_3)}}\left\{m\underline{k}'\,\delta^\epsilon_- + \|-,k',s_i,k\|_+\,(\tau^i)^\epsilon_-\right\} \qquad (72)$$

où le symbole $\|a,\,b,\,c,\,d\|_\xi$ est défini en (16-5d).

Pour les anti-leptons le courant leptonique s'écrit en "remontant la ligne" des anti-particules

$$\underline{j}(+1)^\epsilon = \tilde{u}(k',+1)\,i\underline{\gamma}\,v(\{k\})_\epsilon = \mathrm{tr}\,v(\{k\})_\epsilon\otimes\tilde{u}(k',+1)\,i\underline{\gamma} \qquad (73)$$

Par la même méthode que précédemment, on calcule le produit tensoriel de spineurs à une phase près

$$\boxed{v(\{k\})_\epsilon\otimes\tilde{u}(k',+1) = \frac{1}{\sqrt{2(\underline{k}'.\underline{k}-m\underline{k}'.\underline{s}_3)}}\,\frac{1}{4}\left[\delta^+_\epsilon + i\gamma^5\not{s}_i(\tau^{i*})^+_\epsilon\right](\not{k}-m)(1-i\gamma^5)\not{k}'} \qquad (74)$$

En effectuant la trace et en utilisant l'hermiticité des matrices de Pauli, on obtient

$$\underline{j}(+1)^\epsilon = \frac{-1}{\sqrt{2\underline{k}'.(\underline{k}-m\underline{s}_3)}}\left\{m\underline{k}'\,\delta^\epsilon_+ + \|k',-,s_i,k\|_-\,(\tau^i)^\epsilon_+\right\} \qquad (75)$$

Les identités suivantes

$$\|-,k',s_i,k\|_+ = -\,\|k,k',-,s_i\|_- \;,\quad \|k',-,s_i,k\|_- = \|k,k',-,s_i\|_+ \;, \qquad (76)$$

permettent de regrouper les expressions (71) et (74), en laissant tomber un signe global

$$\boxed{\underline{j}(\xi)^{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\underline{k}'.(\underline{k}-m\underline{S}_3)}} \left\{ m\underline{k}' \delta^{\epsilon}_{\xi} + \xi \| k,k',-S_i \|_{\xi} \, (\zeta^i)^{\epsilon}_{\xi} \right\}} \qquad (77)$$

En hélicité, la tétrade $\{k\}$ est définie par (35b) et le courant leptonique s'écrit sous la forme très simple

$$\underline{j}(\xi)^{\epsilon} = \sqrt{2\underline{k}.\underline{k}'} \left\{ \underline{\hat{k}} \, \delta^{\epsilon}_{\xi} + \xi \, \underline{S}_i \, (\zeta^i)^{\epsilon}_{\xi} \right\} \qquad (78)$$

Pour calculer les éléments de matrice de transition il est interessant de décomposer ce courant sur la tétrade $\{K\}$

$$\underline{j}(\xi)^{\epsilon} = \sqrt{\underline{k}.\underline{k}'} \left\{ \frac{m}{\sqrt{-q^2}} (\underline{K}-\underline{Q}) \, \delta^{\epsilon}_{\xi} - (\xi \, \underline{\tilde{t}} - i \, \underline{n}) \, \delta^{\epsilon}_{-\xi} \right\} \qquad (79)$$

Le courant hadronique faible comprend une partie vectorielle et une partie axiale. La partie vectorielle étant conservée, comme précédemment nous nous plaçons dans le système de Breit du vertex baryonique pour annuler un facteur de forme multipolaire. Dans ce système, les éléments de matrice de transition s'expriment en fonction des composantes sphériques du courant hadronique selon

$$\begin{aligned} T^{\epsilon}_{\xi} = \sqrt{\frac{\underline{k}.\underline{k}'}{-q^2}} \Big\{ & J^0_0 (mch\,\chi\, \delta^{\epsilon}_{\xi} - \xi \sqrt{-q^2}\, sh\,\chi\, \delta^{\epsilon}_{-\xi}) + J^1_0 m \, \delta^{\epsilon}_{\xi} \\ & + J^1_+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[msh\,\chi\, \delta^{\epsilon}_{\xi} + \sqrt{-q^2}\,(1-\xi ch\,\chi)\, \delta^{\epsilon}_{-\xi} \right] \\ & + J^1_- \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-msh\,\chi\, \delta^{\epsilon}_{\xi} + \sqrt{-q^2}\,(1+\xi ch\,\chi) \delta^{\epsilon}_{-\xi} \right] \Big\} \end{aligned} \qquad (80)$$

Les seules composantes sphériques non nulles des fonctions de vertex du courant hadronique se déduisent du tableau (11-28),

$$\left[J^{\pm\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}} \right]^j_0 = \delta_{j0} \, (\mp A + E) + \delta_{j1} \, (\mp D + H) \, , \qquad (81a)$$

$$\left[J^{\pm 3/2}_{\pm\frac{1}{2}} \right]^1_{\pm} = \mp B + F \quad , \quad \left[J^{\mp\frac{1}{2}}_{\pm\frac{1}{2}} \right]^1_{\mp} = \mp C + G \quad , \qquad (81b)$$

où les quantités A,B... H sont des combinaisons linéaires des facteurs de forme multipolaires. En tenant compte de la conservation du courant vectoriel et de la parité de la résonance, elles sont rassemblées dans le tableau (82). Si $\epsilon = (-1)^{s+\frac{1}{2}}$, A,B,C correspondent au courant vectoriel et E,F,G,H au courant axial, tandis que si $\epsilon = (-1)^{s-\frac{1}{2}}$, E,F,G correspondent au courant vectoriel et A,B,C,D au courant axial.

	$\epsilon = (-1)^{s+1/2}$	$\epsilon = (-1)^{s-1/2}$
$\sqrt{8\pi}$ A	$\sqrt{2s+1}\ \mathcal{E}_t^{s+1/2}$	$\sqrt{2s+1}\ \mathcal{E}_t^{s-1/2}$
$\sqrt{8\pi}$ B	$\sqrt{s-1/2}\ \mathcal{E}_r^{s+1/2} + \sqrt{s+3/2}\ \mathcal{M}_r^{s-1/2}$	$\sqrt{s+3/2}\ \mathcal{E}_r^{s-1/2} + \sqrt{s+1/2}\ \mathcal{M}_r^{s+1/2}$
$\sqrt{8\pi}$ C	$\sqrt{s+3/2}\ \mathcal{E}_r^{s+1/2} - \sqrt{s-1/2}\ \mathcal{M}_r^{s-1/2}$	$\sqrt{s-1/2}\ \mathcal{E}_r^{s-1/2} - \sqrt{s+3/2}\ \mathcal{M}_r^{s+1/2}$
$\sqrt{8\pi}$ D	0	$-\sqrt{2s+1}\ \mathcal{E}_l^{s-1/2}$
$\sqrt{8\pi}$ E	$\sqrt{2s+1}\ \mathcal{E}_t^{s-1/2}$	$\sqrt{2s+1}\ \mathcal{E}_t^{s+1/2}$
$\sqrt{8\pi}$ F	$\sqrt{s+3/2}\ \mathcal{E}_r^{s-1/2} + \sqrt{s-1/2}\ \mathcal{M}_r^{s+1/2}$	$\sqrt{s-1/2}\ \mathcal{E}_r^{s+1/2} + \sqrt{s+3/2}\ \mathcal{M}_r^{s-1/2}$
$\sqrt{8\pi}$ G	$\sqrt{s-1/2}\ \mathcal{E}_r^{s-1/2} - \sqrt{s+3/2}\ \mathcal{M}_r^{s+1/2}$	$\sqrt{s+3/2}\ \mathcal{E}_r^{s+1/2} - \sqrt{s-1/2}\ \mathcal{M}_r^{s-1/2}$
$\sqrt{8\pi}$ H	$-\sqrt{2s+1}\ \mathcal{E}_l^{s-1/2}$	0

(82)

Les relations (80) et (81) permettent d'exprimer les éléments de matrice de l'opérateur de transition en fonction des nouveaux facteurs de forme A, B...H.

$$
\begin{aligned}
T^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}{}^{\xi}_{\xi} &= m\,(\mathrm{ch}\,\chi\,[\mp A + E] + [\mp D + H]) \\
T^{\pm 1/2}_{\pm 1/2}{}^{-\xi}_{\xi} &= -\xi\sqrt{-q^2}\,\mathrm{sh}\,\chi\,[\mp A + E] \\
T^{\pm 3/2}_{\pm 1/2}{}^{\xi}_{\xi} &= \pm\frac{m\,\mathrm{sh}\,\chi}{\sqrt{2}}\,[\mp B + F] \\
T^{\pm 3/2}_{\pm 1/2}{}^{-\xi}_{\xi} &= \sqrt{\frac{-q^2}{2}}\,[1 + \mp\xi\,\mathrm{ch}\,\chi][\mp B + F] \\
T^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}{}^{\xi}_{\xi} &= \mp\frac{m\,\mathrm{sh}\,\chi}{\sqrt{2}}\,[\mp C + G] \\
T^{\mp 1/2}_{\pm 1/2}{}^{-\xi}_{\xi} &= \sqrt{\frac{-q^2}{2}}\,[1 \pm \xi\,\mathrm{ch}\,\chi][\mp C + G]
\end{aligned}
\qquad (83)
$$

où nous avons omis le facteur commun $\sqrt{\frac{k.k'}{-q^2}}$, ce que nous ferons dans toute la suite.

Ces éléments de matrice permettent de déterminer les observables des deux réactions induites par des neutrinos et des antineutrinos. Dans

le cas où le nucléon initial n'est pas polarisé, les éléments des matrice densité non normalisées du lepton final et de la résonance, définis par :

$$\tilde{\rho}_\ell(\xi)^{\epsilon}{}_{\epsilon'} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\theta} T^{\sigma\,\epsilon}_{\theta\,\xi}\; T^{\sigma\,\epsilon'\,*}_{\theta\,\xi}, \tag{84a}$$

$$\tilde{\rho}(\xi)^{\sigma}{}_{\sigma'} = \frac{1}{2} \sum_{\theta\epsilon} T^{\sigma\,\epsilon}_{\theta\,\xi}\; T^{\sigma'\,\epsilon\,*}_{\theta\,\xi}. \tag{84b}$$

sont donnés dans les tableaux (85) et (86)

$$\tilde{\rho}_\ell(\xi)^{\xi}{}_{\xi} = \frac{1}{2} m^2 \left[\mathrm{sh}^2\chi(|B|^2+|C|^2+|F|^2+|G|^2) + 2|D|^2+2|H|^2 + 2\,\mathrm{ch}^2\chi(|A|^2+|E|^2) + 4\,\mathrm{ch}\,\chi\,\mathrm{Re}\,(A^*D + E^*H)\right]$$

$$\tilde{\rho}_\ell(\xi)^{-\xi}{}_{-\xi} = -\frac{1}{2} q^2\left[(1+\mathrm{ch}^2\chi)(|B|^2+|C|^2+|F|^2+|G|^2) + 2\mathrm{sh}^2\chi(|A|^2+|E|^2) + 4\,\xi\,\mathrm{ch}\,\chi\,\mathrm{Re}\,(B^*F - C^*G)\right] \tag{85}$$

$$\tilde{\rho}_\ell(\xi)^{\xi}{}_{-\xi} = -\frac{1}{2} m\sqrt{-q^2}\,\mathrm{sh}\,\chi\left\{\xi\,\mathrm{ch}\,\chi(2|A|^2+2|E|^2+|B|^2+|C|^2+|F|^2+|G|^2) + 2\,\mathrm{Re}\,(B^*F - C^*G) + A^*D + E^*H\right\}$$

$$\tilde{\rho}(\xi)^{\pm 3/2}{}_{\pm 3/2} = \frac{1}{4}\left[m^2\mathrm{sh}^2\chi - q^2(1\mp\xi\,\mathrm{ch}\,\chi)^2\right]|B \mp F|^2$$

$$\tilde{\rho}(\xi)^{\pm 1/2}{}_{\pm 1/2} = \frac{1}{4}\left\{\left[m^2\mathrm{sh}^2\chi - q^2(1\mp\xi\,\mathrm{ch}\,\chi)^2\right]|C\pm G|^2 + 2m^2|D\mp H|^2 + 2(m^2\mathrm{ch}^2\chi - q^2\mathrm{sh}^2\chi)|A\mp E|^2 + 4m^2\,\mathrm{ch}\,\chi\,\mathrm{Re}(A\mp E)^*(D\mp H)\right\}$$

$$\tilde{\rho}(\xi)^{3/2}{}_{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{sh}\,\chi\left\{m^2(D-H)^* + \left[(m^2-q^2)\mathrm{ch}\,\chi + \xi q^2\right](A-E)^*\right\}(B-F)$$

$$\tilde{\rho}(\xi)^{-1/2}{}_{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{sh}\,\chi\left\{m^2(D+H) + \left[(m^2-q^2)\mathrm{ch}\,\chi - \xi q^2\right](A+E)\right\}(B+F)^* \tag{86}$$

$$\tilde{\rho}(\xi)^{1/2}{}_{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{sh}\,\chi\left\{\left[m^2(D+H)^* + \left((m^2-q^2)\mathrm{ch}\,\chi + \xi q^2\right)(A+E)^*\right](C+G) - \left[m^2(D-H) + \left((m^2-q^2)\mathrm{ch}\,\chi - \xi q^2\right)(A-E)\right](C-G)^*\right\}$$

$$\tilde{\rho}(\xi)^{3/2}{}_{-1/2} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{sh}^2\chi(m^2-q^2)(B-F)(C-G)^*$$

$$\tilde{\rho}(\xi)^{-1/2}{}_{-3/2} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{sh}^2\chi(m^2-q^2)(C+G)(B+F)^*$$

Comme pour l'électroproduction, quel que soit son spin, la matrice densité de la résonance est un noyau central 4 × 4 à coins nuls bordé de zéros, (cf. 57).

La trace de ces matrices densité, proportionnelle à la section efficace de diffusion est

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\tilde{\rho}(\xi) = \frac{1}{2}\Big\{&[m^2 sh^2\chi - q^2(1+ch^2\chi)][\,|B|^2+|C|^2+|F|^2+|G|^2] \\ &+2m^2(|D|^2+|H|^2)+2[m^2 ch^2\chi - q^2 sh^2\chi](|A|^2+|E|^2) \\ &+4ch\chi\ \mathrm{Re}[m^2(A^*D+E^*H) - \xi q^2(B^*F - C^*G)]\Big\}\end{aligned} \tag{87}$$

Cette trace s'exprime de façon simple en fonctions des multipoles vectoriels et axiaux repérés par les indices V et A,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\tilde{\rho}(\xi) = \frac{2s+1}{16\pi}\Big\{&[m^2 sh^2\chi - q^2(1+ch^2\chi)](|\mathcal{E}^V_\tau|^2+|\mathcal{M}^V_\tau|^2+|\mathcal{E}^A_\tau|^2+|\mathcal{M}^A_\tau|^2) \\ &+2m^2|\mathcal{E}^A_\ell|^2+2[m^2 ch^2\chi - q^2 sh^2\chi](|\mathcal{E}^V_t|^2+|\mathcal{E}^A_t|^2) \\ &-4ch\chi\ \mathrm{Re}[m^2\,\mathcal{E}^{A\,*}_t\,\mathcal{E}^A_\ell + \xi q^2(\mathcal{E}^{V*}_\tau\,\mathcal{M}^A_\tau + \mathcal{M}^{V*}_\tau\,\mathcal{E}^A_\tau)]\Big\}\end{aligned} \tag{88}$$

Remarquons que seul le terme $\mathcal{E}^{V*}_\ell\,\mathcal{M}^A_\tau + \mathcal{M}^{V*}_\tau\,\mathcal{E}^A_\ell$ qui mélange les facteurs de forme vectoriels et axiaux est responsable de la violation de la parité.

Pour étudier le comportement des observables au bord de la région physique il est nécessaire de régulariser les facteurs de forme électriques de genre temps et longitudinaux définis dans le système de Breit. En effet nous avons montré cf.Eq.(37) que le choix de ce système introduit un coefficient $\frac{1}{\sqrt{-q^2}}$ dans les facteurs de forme. Ceci est vrai pour les facteurs de forme axiaux

$$\mathcal{E}^A_t = \tilde{\mathcal{E}}^A_t\sqrt{-q^2} \quad , \quad \mathcal{E}^A_\ell = \tilde{\mathcal{E}}^A_\ell\sqrt{-q^2} \quad , \tag{89}$$

mais pour les facteurs de forme vectoriels la conservation de ce courant ramène un coefficient $-q^2$, soit

$$\mathcal{E}^V_t = \sqrt{-q^2}\ \tilde{\mathcal{E}}^V_t \quad . \tag{90}$$

Donc au bord de la région physique, ch χ = 1, sh χ = 0, la trace (88) devient

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\tilde{\rho} = &-q^2m^2|\tilde{\mathcal{E}}^V_t|^2 - \frac{m^2}{q^2}(|\tilde{\mathcal{E}}^A_t|^2+|\tilde{\mathcal{E}}^A_\ell|^2) \\ &-q^2(|\mathcal{E}^V_\tau|^2+|\mathcal{M}^V_\tau|^2+|\mathcal{E}^A_\tau|^2+|\mathcal{M}^A_\tau|^2) \\ &+2\mathrm{Re}\Big[\frac{m^2}{q^2}\,\tilde{\mathcal{E}}^{A*}_t\,\tilde{\mathcal{E}}^A_\ell - \xi q^2(\mathcal{E}^{V*}_\tau\,\mathcal{M}^A_\tau + \mathcal{M}^{V*}_\tau\,\mathcal{E}^A_\tau)\Big]\end{aligned} \tag{91}$$

Si on fait un développement limité du transfert (28) au premier ordre en la masse du lepton on obtient

A l'avant $q^2 \simeq - m^2 \frac{M^2-M'^2}{W-M^2}$ (92a)

A l'arrière $q^2 \simeq - \frac{1}{W}(W-M^2)(W-M'^2)$ (92b)

et si on fait tendre la masse du lepton vers zéro, on obtient

A l'avant $\mathrm{tr}\,\tilde{\rho} = - \frac{m^2}{q^2} \left| \tilde{\mathcal{E}}^A_t - \tilde{\mathcal{E}}^A_z \right|^2$ (93a)

A l'arrière $\mathrm{tr}\,\tilde{\rho} = - q^2 \left[\left| \mathcal{E}^V_\tau + \xi \, \mathcal{M}^A_\tau \right|^2 + \left| \mathcal{M}^V_\tau + \xi \, \mathcal{E}^A_\tau \right|^2 \right]$ (93b)

La relation (93a) montre qu'à l'avant, à cause de la conservation du courant vectoriel, il n'y a plus violation de la parité. C'est le test proposé par Adler, [Adl.64].

Dans ce cas les matrices densité du lepton et de la résonance sont diagonales, et si on fait tendre la masse du lepton vers zéro on obtient pour les matrices normalisées

A l'avant

$$\rho_\ell(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_\ell(+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\xi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (94)$$

A l'arrière

$$\rho_\ell(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(-1) = \frac{1}{|B-F|^2 + |C+G|^2} \begin{pmatrix} |B-F|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |C+G|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (95a)$$

$$\rho_\ell(+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(+1) = \frac{1}{|B+F|^2 + |C-G|^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |C-G|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |B+F|^2 \end{pmatrix} \qquad (95b)$$

où B, F, C, G sont bien les combinaisons linéaires de multipoles définis en (82).

REFERENCES

[Adl.64] ADLER S.L., Phys.Rev.135 (1964) B963.

[Adl.68] ADLER S.L., Ann.of Phys. 50 (1968) 189.

[Be.Ve.65] BERMAN S. et VELTMAN M., Nuov.Cim.38 (1965) 993.

[Bij.70] BIJTEBIER J., Nucl.Phys. B21 (1970) 158.

[Bj.Dr.64] BJORKEN J.D. et DRELL S.D., Relativistic quantum mechanics (Mc Graw-Hill, New York 1964).

[Bl.We.52] BLATT J. et WEISSKOPFF V., Theoretical nuclear physics (Wiley, New York 1952).

[Bo.Mi.58] BOUCHIAT C. et MICHEL L., Nucl.Phys. 5 (1958) 416.

[Br.Sa.68] BRINK D.M. et SATCHLER J.R., Angular momentum, (Clarendon Press, Oxford 1968).

[C.G.L.N.57] CHEW G.F.,GOLDBERGER M.L.,LOW F.E. et NAMBU Y.,Phys.Rev. 106 (1957) 1345.

[Den.60] DENNERY P. ,Phys.Rev.124 (1960) 2000.

[Do.Mi.Mi.70] DONCEL M.G.,MICHEL L.,MINNAERT P., Matrices densité de polarisation,Ecole d'Eté de Gif-sur-Yvette 1970, Ed. R. Salmeron, Ecole Polytechnique, Paris.

[Du.Tr.68] DUFNER A.J. et TSAI Y.S., Phys.Rev.168 (1968) 1801.

[D.D.M.62] DURAND III L., DE CELLES P.C. et MARR R.B.,Phys.Rev.126 (1962) 1882.

[Ed.57] EDMONDS A.R., Angular momentum in quantum mechanics (Princeton University Press 1957).

[E.S.W.60] ERNST F.J.,SACHS R.G. et WALI K.C.,Phys.Rev. 119 (1960) 1105.

[Fl.Mi.68] FLORESCU V. et MINNAERT P.,Phys.Rev. 168 (1968) 1662.

[Go.Wa.64] GOLDBERGER M.L. et WATSON K.M., Collision theory (Wiley, New York 1964).

[M.R.R.69] MARSHAK R.E., RIAZUDDIN et RYAN C.P., Theory of weak interactions (Wiley, New York 1969).

[Mic.64] MICHEL L., Cours sur les interactions faibles, I.H.E.S. (1964).

[Mi.Ro.61] MICHEL L. et ROUHANINEJAD H., Phys.Rev. 122 (1961) 242.

[Mi.Wi.55] MICHEL L. et WIGHTMAN A.S. Phys.Rev. 98 (1955) 1190.

[Min.68] MINNAERT P., Thèse, Orsay 1968.

[Min.71] MINNAERT P., The polarisation domain, Les Houches 1971 (Gordon and Breach, New York).

* [Don.67] DONCEL M.G., Tesis Doctoral, Barcelona 1967.

[Mo.St.66] MOUSSA P. et STORA R., Angular analysis of elementary particle reactions, Herceg-Novi 1966 (Gordon and Breach, New York).

[Ra.66] DE RAFAEL E., Ann.Inst.Henri Poincaré 5 (1966) 83.

[Re.Wh.57] REGGE T. et Wheeler J.A., Phys.Rev.108 (1957) 1063.

[Ros.55] ROSE M.E., Multipole fields (Wiley, New York 1955).

[Ros.57] ROSE M.E., Elementary theory of angular momentum (Wiley, New York, 1957).

[Sal.64] SALIN P., Nuov.Cim. 32 (1964) 521.

[Sc.VH.73] SCHREIWER P.A. et VON HIPPEL F., Nucl.Phys.B58 (1973) 333

[Wig.60] WIGHTMAN A.S., L'invariance dans la mécanique quantique relativiste. Les Houches 1960 (Hermann, Paris 1960).

[Wig.39] WIGNER E.P., Ann.Math. 40 (1939) 149.

[Wig.59] WIGNER E.P., Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra (Academic Press, New York, 1959).

[Ze.70] ZERILLI F.J., Journ.Math.Phys. 11, (1970) 2203.

N.B. Chaque article a sa propre bibliographie.

TABLE DES MATIERES

1 - INTRODUCTION p. 1

PREMIERE PARTIE : Harmoniques sphériques tensorielles et multipoles tensoriels

CHAPITRE PREMIER : Harmoniques sphériques tensorielles et multipoles tensoriels sur E_3

2 - RAPPELS SUR LES REPRESENTATIONS DU GROUPE DES ROTATIONS p. 7

2.1-Base vectorielle sphérique p. 7
2.2-Représentations d'ordre entier des rotations p. 8
2.3-Harmoniques sphériques p. 10

3 - HARMONIQUES SPHERIQUES TENSORIELLES SUR E_3 p. 11

3.1-Harmoniques sphériques vectorielles p. 11
3.2-Base tensorielle sphérique d'ordre 2 p. 14
3.3-Harmoniques sphériques tensorielles d'ordre 2 p. 15
3.4-Base tensorielle sphérique d'ordre quelconque p. 18
3.5-Harmoniques sphériques tensorielles d'ordre quelconque p. 20

4 - MULTIPOLES TENSORIELS SUR E_3 p. 21

4.1-Multipoles vectoriels p. 22
4.2-Multipoles tensoriels d'ordre 2 p. 24
4.3-Multipoles tensoriels d'ordre quelconque p. 29

APPENDICES

A-Coefficients de Clebsch-Gordan,Symboles-3j et 6j p. 32

A.1- Coefficients de Clebsch-Gordan p. 32
A.2- Symboles-3j p. 33
A.3- Symboles-6j p. 34

B-Action des opérateurs $\vec{u}$, $r\vec{\nabla}$ et $\vec{L}$ sur les harmoniques sphériques et les multipoles vectoriels p. 36

B.1-Action de l'opérateur $\vec{u}$ sur les harmoniques p. 36
B.2-Action de l'opérateur $\vec{L}$ sur les harmoniques p. 37
B.3-Action de l'opérateur $r\vec{\nabla}$ sur les harmoniques p. 38
B.4-Action de l'opérateur $\vec{L}^2$ sur les harmoniques et les multipoles vectoriels p. 40
B.5-Formule du gradient-Action de l'opérateur $r\vec{\nabla}$ sur les multipoles vectoriels p. 40

C-Application des multipoles vectoriels à l'électromagnétisme p. 43

C.1-Equations d'Helmholtz p. 43
C.2-Invariance de jauge-Champ électromagnétique longitudinal p. 44
C.3-Jauge solénoïde-Potentiels magnétique et électrique p. 44
C.4-Champs et potentiels multipolaires duaux p. 46

CHAPITRE SECOND : Harmoniques sphériques tensorielles et multipoles tensoriels sur M

5 - RAPPEL SUR L'ESPACE DE MINKOWSKI ET LE GROUPE DE LORENTZ p. 48

5.1-Espace de Minkowski-Tétrade sphérique p. 48
5.2-Groupe de Lorentz p. 49
5.3-Petit groupe d'un quadrivecteur-Rotations p. 51
5.4-Transformation de Lorentz pure p. 52
5.5-Représentation des transformations de Lorentz pures p. 53
5.6-Décomposition canonique d'une transformation de Lorentz p. 56

6 - HARMONIQUES SPHERIQUES TENSORIELLES SUR M p. 56

6.1-Base tensorielle sphérique p. 57
6.2-Harmoniques sphériques d'un quadrivecteur p. 59
6.3-Harmoniques sphériques tensorielles sur M p. 60
6.4-Lois de transformations des harmoniques sphériques tensorielles p. 62
6.5-Harmoniques sphériques tensorielles d'ordre 1 et 2 p. 63

7 - MULTIPOLES TENSORIELS SUR M p. 65

7.1-Multipoles tensoriels sur M p. 66
7.2-Propriétés de transformation des multipoles p. 68
7.3-Notion de multipoles irréductibles p. 69
7.4-Multipoles quadrivectoriels irréductibles p. 70
7.5-Multipoles tensoriels irréductibles d'ordre 2 p. 72

SECONDE PARTIE : Développement multipolaire des fonctions de vertex

CHAPITRE TROISIEME : Développement multipolaire des fonctions de vertex à une particule finale

8 - RAPPELS SUR LES ETATS A UNE PARTICULE FINALE p. 77

8.1-Tétrades spéciales p. 77
8.2-Rotations de Wigner généralisées p. 78
8.3-Lois de transformations des états à une particule p. 80
8.4-Etats standards à une particule p. 81

9 - FONCTIONS DE VERTEX REDUITES p. 82

9.1-Lois de transformation d'un opérateur tensoriel p. 82
9.2-Fonctions de vertex p. 83
9.3-Fonctions de vertex standard p. 84
9.4-Paramétrisation des fonctions de vertex standard p. 86
9.5-Fonctions de vertex réduites p. 88
9.6-Remarques p. 89

10 - DEVELOPPEMENT DES FONCTIONS DE VERTEX EN FACTEURS DE FORME p. 90

10.1-Facteurs de forme p. 91
10.2-Quantification en hélicité p. 92
10.3-Règles de sélection dues à la parité p. 94
10.4-Règles de sélection dues au renversement du temps p. 95
10.5-Cas des particules identiques p. 95

11 - DEVELOPPEMENT MULTIPOLAIRE DES FONCTIONS DE VERTEX p. 97

11.1-Facteurs de forme multipolaires p. 97
11.2-Règles de sélection sur les facteurs de forme multipolaires p. 99
11.3-Facteurs de forme invariants des fonctions de vertex scalaires p. 99
11.4-Facteurs de forme multipolaires irréductibles des fonctions de vertex quadrivectorielles p. 100
11.5-Conservation du courant vectoriel p. 103

11.6-Facteurs de forme multipolaires irréductibles des fonctions de vertex tensorielles d'ordre 2 p. 105
11.7-Contraintes sur l'opérateur tensoriel p. 107

CHAPITRE QUATRIEME : Développement multipolaire des fonctions de vertex à deux particules finales

12 - RAPPELS SUR LES ETATS A DEUX PARTICULES p. 109

12.1-Etats standard à deux particules p. 109
12.2-Paramétrisation des états standard à deux particules p. 110
12.3-Etats canoniques à deux particules p. 112
12.4-Action de la parité et du renversement du temps sur les états canoniques p. 113

13 - FONCTIONS DE VERTEX REDUITES A DEUX PARTICULES FINALES p. 114

13.1-Fonctions de vertex standard à deux particules finales p. 115
13.2-Paramétrisation des fonctions de vertex standard à deux particules finales p. 116
13.3-Remarque cinématique p. 117
13.4-Fonctions de vertex réduites à deux particules finales p. 118
13.5-Conséquences de l'invariance par parité et par renversement du temps p. 120

14 - DEVELOPPEMENT MULTIPOLAIRE DES FONCTIONS DE VERTEX A DEUX PARTICULES FINALES p. 120

14.1-Facteurs de forme p. 121
14.2-Facteurs de forme multipolaires p. 122
14.3-Quantification en hélicité p. 124
14.4-Règles de sélection dues à la parité p. 125
14.5-Règles de sélection dues au renversement du temps p. 126

15 - FACTEURS DE FORME MULTIPOLAIRES ET MODELE ISOBARIQUE DANS LE CAS D'UN OPERATEUR QUADRIVECTORIEL p. 127

15.1-Facteurs de forme multipolaires irréductibles p. 127
15.2-Hypothèse du modèle isobarique p. 132
15.3-Désintégration de l'isobare p. 133
15.4-Contributions d'un isobare au développement multipolaire des fonctions de vertex à deux particules finales p. 134
15.5-Application à la formation d'une résonance de spin 3/2 p. 136

CHAPITRE CINQUIEME : Représentation des fonctions de vertex quadrivectorielles dans le formalisme de Rarita-Schwinger

16 - RAPPELS SUR LA PRESENTATION DES ETATS DE POLARISATION p. 140

16.1-Matrices de Dirac p. 140
16.2-Particules de spin ½ p. 141
16.3-Particules de spin entier p. 142
16.4-Particules de spin demi-entier p. 143

17 - DEVELOPPEMENT EN FACTEURS DE FORME DE RARITA-SCHWINGER DES FONCTIONS DE VERTEX QUADRIVECTORIELLES p. 144

17.1-Facteurs de forme de Rarita-Schwinger p. 145
17.2-Calcul des fonctions de vertex p. 147
17.3-Relations entre les facteurs de forme multipolaires et ceux de Rarita-Schwinger p. 149

17.4-Conservation du courant vectoriel p. 150

TROISIEME PARTIE : Quelques problèmes de polarisation

CHAPITRE SIXIEME : Mesures de polarisation et positivité

18 - RAPPELS SUR L'OPERATEUR DENSITE DE POLARISATION p. 152

18.1-Opérateur densité et domaine de polarisation p. 152
18.2-Matrice densité et paramètres multipolaires p. 154
18.3-Vecteur de Stokes des matrices densité de dimension 2 p. 156
18.4-Opérateur densité d'un système de deux particules p. 157
18.5-Opérateur densité et distribution angulaire dans une transition p. 158

19 - REMARQUES SUR LES MESURES DE POLARISATION p. 160

Article : Some remarks on polarization measurement and polarization domain p. 161

20 - TESTS DE SPIN RIGOUREUX DANS LES DESINTEGRATIONS FORTES A DEUX AMPLITUDES p. 171

Article : Rigourous spin tests from two amplitude strong decays p. 172

CHAPITRE SEPTIEME : Désintégrations en séquence et tests de spin dans les référentiels canoniques et d'hélicité

21 - DESINTEGRATIONS EN SEQUENCE ET TESTS DE SPIN DANS LES REFERENTIELS CANONIQUES ET D'HELICITE p. 183

Article : Sequential decays and spin tests in canonical and helicity frames p. 185

CHAPITRE HUITIEME : Production de résonances baryoniques par interaction électromagnétique ou faible

22 - PRODUCTION DE RESONANCES BARYONIQUES PAR INTERACTION ELECTROMAGNETIQUE OU FAIBLE p. 220

22.1-Interaction courant - courant p. 221
22.2-Photoproduction p. 221
22.3-Cinématique des réactions à deux corps p. 225
22.4-Electroproduction p. 227
22.5-Neutrinoproduction p. 233

REFERENCES p. 240

Vu et Approuvé

Bordeaux, le

Le Président de l'Université de Bordeaux I

J.M. AUBY